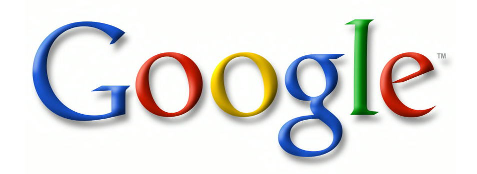



SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE

Die Methode der Kleinsten Quadrate

abgeleitet aus der

Wahrscheinlichkeitslehre

und ihre

Anwendung auf naturwissenschaftliche Messungen.

Zum Selbstunterricht.

Bearbeitet

von

Wilhelm

W. von RÜDIGER

Doctor der Philosophie.

BERLIN.

Verlag der Gewerbe-Buchhandlung von Reinhold Kühn.

1877.

1878, July 23.
Minot Fund.

Seiner Excellenz

dem

Chef-Präsidenten des Kammergerichts des Königreichs Preussen

Wirklichen Geheimen Rath

Herrn Dr. jur. von Strampff

als

Liebhaber der Mathematik und der Naturwissenschaften

widmet

diese Abhandlung als Zeichen seiner Verehrung

der Verfasser.

Vorwort.

Die geistreiche und interessante Verknüpfung der Wahrscheinlichkeits-Lehre mit der Methode der kleinsten Quadrate wird noch heute in manchen wissenschaftlichen Kreisen als ein müssiges Spiel mathematischer Untersuchungen angesehen, trotzdem man in ebendenselben Kreisen sich gern und ausschliesslich der mit ihrer Hülfe gewonnenen Resultate bedient und nicht wegläugnen kann, dass sie für naturwissenschaftliche, sowie für geodätische Zwecke die beste und allein praktisch-brauchbare Ausgleichungs-Rechnung sei. Diejenigen übrigens, welche die Herbeiziehung des Begriffes der Wahrscheinlichkeiten zur Begründung der Methode der kleinsten Quadrate als eine erkünstelte bezeichnen, und behaupten, dass man ohne solchen fertig werden könne, übersehen, dass sie sich seiner dennoch — nur unter verändertem Namen — bedienten, dass die Wahrscheinlichkeits-Lehre nothwendiger Weise die Vorläuferin für die erwähnte Methode sein musste, und dass die Ausbildung der Letzteren schwerlich so schnell und bequem von Statten gegangen wäre ohne Zuhülfenahme der Ersteren. Die absprechenden Urtheile gegen den inneren Zusammenhang beider Theorien erinnern lebhaft an die geistreichen, aber vergeblichen Bemühungen Lagrange's den Begriff des Unendlich-Kleinen bei Begründung des Infinitesimal-Calculs verbannen zu wollen.

Wir unterlassen es auf eine Untersuchung über Recht oder Unrecht derartiger Angriffe einzugehen, vielmehr ist es unser Zweck und Aufgabe die Herleitung der Theorie, Entwicklung der Formeln und Anwendung derselben auf einige praktische Beispiele zu geben.

Wegen der selbstverständlichen engeren Grenzen dieser Abhandlung müssen wir uns auch begnügen, aus der Fülle des Stoffes nur das Allernothwendigste herauszuheben, und können uns ebensowenig über das ganze Gebiet der Wahrscheinlichkeits-Rechnung als über den verschiedenartig ausgebildeten Rechnungs-Chematismus bei Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate verbreiten. Wir folgen darin den Angaben und Verfahren von Gauss.

Sollten manche der geneigten Leser einen ausführlicheren Text zur Erläuterung der Formeln vermissen, so wollen sie gütigst diesen Mangel mit dem gebotenen Umfange dieser Abhandlung entschuldigen und sich der ausgezeichneten Schriften von Daniel Bernoulli, Laplace, Lagrange, Legendre, Littrow, Moser, Gauss, Bessel, Hansen bedienen.

Unserem Standpunkte gemäss erscheint es uns am zweckmässigsten, die Entwicklung der Methode der kleinsten Quadrate aus der Wahrscheinlichkeits-Lehre heraus durch einen historischen Abriss darzuthun und damit zu beginnen.

Frankfurt a. O., im December 1876.

Der Verfasser.

INHALTS-VERZEICHNISS.

I. Abschnitt.

Historische Einleitung.

II. Abschnitt.

Prinzipien der Wahrscheinlichkeits-Rechnung und Methode der kleinsten Quadrate.

III. Abschnitt.

Anwendung der Methode auf physikalische Beobachtungen.

I. Abschnitt.

Historische Einleitung.

§. 1.

Die Anwendung der Mathematik auf die Gesetze der Wahrscheinlichkeiten ist unstreitig einer der evidentesten Beweise dafür, wie diese abstracteste aller Wissenschaften selbst in diejenigen Sphären des Lebens mit Erfolg einzudringen versteht, welche auf den ersten Anblick der Gesetzmässigkeit zu entbehren und für die strengen Formen der Mathematik wenig geeignet scheinen.

Pascal[1]) gebührt der Ruhm und das Verdienst der Erfindung und Begründung der Wahrscheinlichkeits-Rechnung. Er schrieb im Jahre 1656 in einem Briefe an die französische Academie der Wissenschaften: „et sic matheseos demonstrationes cum aleae incertitudine jungendo, et quae contraria videntur conciliando, ab utraque nominationem suam accipiens stupendum hunc titulum jure sibi arrogat: „aleae geometria"; und inaugurirte damit die Anwendung der Mathematik auf die Theorie der Wahrscheinlichkeiten.

Eine unmittelbare Veranlassung zu einer eingehenderen Beschäftigung mit dieser Theorie wurde Pascal geboten durch ein ihm 1654 vorgelegtes Problem, folgendermassen lautend: „Von 2 Spielern hat jeder eine Anzahl Points gewonnen; sie trennen sich, ohne das Spiel zu Ende zu bringen; wie muss in diesem Falle der Einsatz unter sie vertheilt werden?"

Pascal löste die Aufgabe vermöge einfacher rationeller Ueberlegung und theilte sie seinem Zeitgenossen Fermat[2]) mit, der seinerseits auch eine Lösung gab und zwar in streng mathematischer Form, indem er sie auf die Theorie der Combinationslehre stützte. Letzterer schloss folgendermassen: „Wenn 2 Spieler ein Spiel mit 3 Points spielen, so sind überhaupt 8 Variationen möglich; entweder gewinnt der eine alle drei, oder er gewinnt zwei und verliert den dritten, oder er gewinnt den ersten und den dritten und verliert den zweiten etc. etc. Diese Chancen zwischen den 2 Spielern lassen sich durch die Anzahl der Variationen der Buchstaben a u. b zur 3. Klasse ausdrücken:

---

1) Pascal, geb. 1624 zu Clermont-Ferrand, gest. 1662 zu Paris.

2) Fermat, geb. 1608 zu Toulouse, gest. 1665 zu Paris.

1. Fall $a.a.a$	4. Fall $a.b.b$	7. Fall $b.b.a$
2. „ $a.a.b$	5. „ $b.a.a$	8. „ $b.b.b$
3. „ $a.b.a$	6. „ $b.a.b$	. . . .

Es sind also 8 Fälle möglich, nicht mehr, nicht weniger. Wenn nun das Spiel so steht, dass der Erste 2 Points und der Zweite noch keinen gewonnen hat, und sie brechen das Spiel ab, so sind dem ersten Spieler 7 von den 8 Fällen, dem zweiten nur 1 Fall günstig um das Spiel zu gewinnen. Der Erste zieht daher $^7/_8$, der Zweite $^1/_8$ des Gesammteinsatzes.

§ 2.

Die mit der Wahrscheinlichkeits-Rechnung in so naher Verbindung stehende Combinationslehre wurde nach Pascal hauptsächlich durch Leibnitz[1]), Wallis[2]), Jacob Bernoulli[3]) ausgebildet. Letzterer schrieb das in der Geschichte der Wahrscheinlichkeits-Rechnung epochemachende Werk „Ars conjectandi 1713 (8 Jahre nach seinem Tode erschienen)." Einer der wichtigsten Sätze in diesem Werke ist folgender: sind $\frac{b}{a}$ u. $\frac{c}{a}$ Wahrscheinlichkeiten des Eintretens und Nichteintretens eines Ereignisses bei einmaligem Versuche, so dass $\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=1$. ist, so repräsentirt die Summe aller Glieder des entwickelten Binoms $\left[\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right]^n$ vom 1. bis und mit dem Gliede, welches die Factoren $\left[\frac{b}{a}\right]^m \cdot \left[\frac{c}{a}\right]^{n-m}$ enthält, diejenige Wahrscheinlichkeit, dass das Ereigniss bei n Versuchen m mal eintrete.

Auch Huyghens[4]) hatte sich etwa zu gleicher Zeit wie Pascal und Fermat mit der Theorie der Wahrscheinlichkeiten beschäftigt. In seiner Schrift: „de ratiociniis in ludo aleae" 1657 ist der wichtigste Satz ohne Zweifel folgender: „Wenn ein Spieler p Chancen hat die Summe a und q Chancen die Summe b zu gewinnen, so hat er Anspruch auf die Summe $\frac{pa+qb}{p+q}$. wenn er also für beide Summen gleiche Chancen hat, so ist sein Anspruch $\frac{1}{2}\left[a+b\right]$ Der Hauptwerth der Huyghens'schen Abhandlung besteht darin, dass sie zuerst eine systematische und analytische Formulirung der Grundsätze der Wahrscheinlichkeitslehre giebt.

---

1) Leibnitz, geb. 3. Juli 1646 zu Leipzig, gest. 4. Nov. 1716 zu Hannover.
2) Wallis, geb. 1616 zu Achford in Kent, gest. 1703 zu Oxford.
3) Jacob Bernoulli, geb. 27. Dez. 1654 zu Basel, gest. 1705 zu Basel.
4) Huyghens, geb. 1629 im Haag, gest. 1695 im Haag (1666—1681 in Paris).

Neben den Gebrüdern Daniel[1]) und Nicolaus[2]) Bernoulli (Neffen von Jacob Bernoulli), deren Ersterer sich durch seine neue Auffassungsweise beim Glücksspiel „der moralischen Erwartung (emolumentum)“ und der Letztere durch das berühmte „Petersburger Problem“ bekannt gemacht hatten, verdankt die Theorie der Wahrscheinlichkeiten den franz. Mathematikern Abr. de Moivre[3]) und Pierre Remond de Montmort[4]) wesentliche Fortschritte durch die Anwendung der Reihen auf die Lösung der Probleme. Die Abhandlungen des Ersteren sind: De mensura sortis 1711. The doctrine of chances 1718. Duration of play 1730. Die des Letzteren: „Essai d'analyse sur les jeux de hazard 1708 Paris, in welchem Montmort das bei den Franzosen sehr beliebte Spiel Treize behandelt. Nach ihm ist die Wahrscheinlichkeit unter 13 Karten, von As bis König mit 1 bis 13 bezeichnet, diejenige nach der Ordnungsnummer der Ziehung mit der Nummer ihres Werthes übereinstimmend zu ziehen $W = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ wo n die Anzahl der gezogenen Karten bezeichnet.

§. 3.

Als der erste Gegner der bis dahin unangefochtenen Grundprincipien der Wahrscheinlichkeitslehre trat d'Alembert[5]) in seinen „Opuscules mathematiques, Tom II 1761 Paris“ auf, ohne aber mehr Klarheit in die Sache zu bringen. Seine Kritik des „Croix ou Pile“ betraf das bei Nicolaus Bernoulli erwähnte Petersburger Problem, welches lautete: *A* wirft eine Münze in die Luft; wenn der Kopf beim ersten Wurf oben liegt, so erhält er von *B* 1 Thaler, wenn der Kopf beim zweiten Wurf oben erscheint, erhält er 2 Thaler, beim dritten Wurf 4 Thaler, beim vierten Wurf 8 Thaler etc. etc. Nach Daniel Bernoulli'scher Lösung wäre die mathematische Erwartung in der Reihe:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \frac{8}{2^4} + \cdots\cdots \text{in inf.} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdots = \infty$$

zu finden. *A* müsste also *B* eine unendlich grosse Summe geben, wenn dieser auf solche Weise mit ihm spielen wollte. Wegen des hierin liegenden Paradoxons nahm Bernoulli seine Zuflucht zur moralischen Erwartung.

D'Alembert machte dagegen die Einwendung, dass die Wahrscheinlichkeit mit einer Münze in 1 Wurf den Kopf zu werfen, nicht

---

1) Daniel Bernoulli, geb. 1700 zu Gröningen, gest. 1782 zu Basel.
2) Nicolaus Bernoulli, geb. 1695 zu Gröningen, gest. 1726 zu Petersburg.
3) Moivre, geb. 1667 zu Vitri (Champagne), gest. 1754 zu London.
4) Montmort, geb. 1678, gest. 1719.
5) Pierre Remond d'Alembert, geb. 1717 zu Paris, gest. 1783 zu Paris.

immer gleich $\frac{1}{2}$ bliebe, sondern dass sie um so kleiner werde, je öfter hintereinander schon der Kopf oben erschienen sei. Ferner wandte er sich gegen ein anderes der Grundprincipien, indem er sagt: „Die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{m}$ eines Spielers p Thaler zu gewinnen, verhält sich zur Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$ eines andern Spielers wie np zu mp Thaler; also $\frac{1}{m} \cdot mp = \frac{1}{n} \cdot np$ Thaler; womit er sich einverstanden erklärt. Dagegen verneint er, dass die Erwartung eines Spielers, welcher die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{m}$ hat, mp Thaler zu gewinnen, gleich sei der Erwartung eines Spielers, der die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$ hat, np Thaler zu gewinnen. Er sagt: die Erwartung desjenigen sei grösser, welcher die grössere Wahrscheinlichkeit hat, obgleich die zu erwartende Summe kleiner sei, und dass man nicht zaudern werde, die Erwartung eines Spielers, der die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ hat, 1000 Thaler zu gewinnen, derjenigen eines anderen Spielers vorzuziehen, der die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2000}$ hat, 1 Million Thaler zu gewinnen. So überzeugend diese Reflexionen auch klingen, und so sehr man hiernach berechtigt ist, von d'Alembert's eminentem kritischen Geiste eine neue, sicherere Theorie zu erwarten, so enttäuscht sieht man sich durch d'Alembert's Worte: „Vous me demanderez peut-être quels sont les principes quil faut, selon moi, substituer à ceux dont je révoque en doute l'exactitude? Je n'en sais rien, et je suis même très porté à croire que la matière dont il s'agit, ne peut être soumise au moins à plusieurs égards, à un calcul exact et précis, également net dans ses principes et dans ses résultats".

§. 4.

Wir sehen, dass bis zu jener Zeit etwa bis ums Jahr 1760 sich die Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht aus der niederen Sphäre der Glücksspiel-Berechnungen zu erheben vermochte. Da endlich war es Euler,[1]) welcher diesem Calcul einen würdigeren Platz in der politischen Arithmetik anwies, indem er es auf die Berechnungen von Lebens-Versicherungen und Renten anwandte.

[1]) Leonh. Euler, geb. 1707 zu Basel, gest. 1783 zu Petersburg (1741—66 in Berlin).

Obgleich die Wahrscheinlichkeitsrechnung Euler keine ausserordentliche Leistungen zu verdanken hat, so genügt doch diese neue von ihm ausgegangene, erspriesslichere Richtung allein schon, um seinen Namen in der Geschichte derselben nicht zu vergessen. Seine betreffenden Abhandlungen sind: „Recherches generales sur la mortalité et la multiplication du genre humain.“ „Sur les rentes viagéres.“ 1760. Sur la Probabilité des sequences dans la lotterie Génoise 1765. In seiner „solutio quarandam quaestionum difficiliorum in calculo probabilium“ opus anal. Tom III Berlin 1785 weist er d'Alembert's feindliche Angriffe auf die Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung zurück, indem er unter Anderm sagt: „Neque me deterrent objectiones Illustris d'Alembert, qui hunc calculum suspectum reddere est conatus.“

In dieser gegenwärtigen Periode tritt noch auf dem neuen Felde der Lebens- und Renten-Versicherung der durch seine geniale Auffassungsweise des socialen und politischen Lebens anderweit bekannte Marquis de Condorcet[1]) glänzend hervor. Hauptsächlich sind es seine Schriften: Essai d'analyse Paris 1768; Eloge et Pensées de Pascal London 1776; Esquisses d'un tableau historique des progrès de l'esprit humain, Paris 1795, welche der Erwähnung und Beachtung verdienen.

§. 5.

Nach diesem neuen Schritt beginnt erst die wirkliche und aufrichtige Anerkennung ferner stehender wissenschaftlicher Kreise für das Probabilitäts-Calcul, während es bis dahin nur als ein geistreiches Spiel mathematischer Untersuchungen betrachtet worden war.

Von da an wenden sich nun auch eifriger seine Freunde an dessen Ausbildung, und zwar hauptsächlich zur practischen Anwendung im Leben in zwei sich unterscheidende Hauptrichtungen, welche sind:

1) Die Wahrscheinlichkeitslehre der **unbekannten** überhaupt möglichen Fälle, ein Ereigniss herbeizuführen. Dieser fällt die Aufgabe zu, den Werth irgend einer unbekannten Grösse zu ermitteln und das darauf gestützte Calcul ist die zum Thema dieser Abhandlung gewählte Methode der kleinsten Quadrate, vornehmlich in der Astronomie, Geodäsie und Naturwissenschaften benutzt, um Beobachtungsfehler auszugleichen oder auf ein Minimum zu reduciren.

2) Die Wahrscheinlichkeitslehre der **bekannten** überhaupt möglichen Fälle, welche ein Ereigniss herbeiführen. Letztere findet Anwendung in der Statistik und politischen Arithmetik, indem auf bekannte Thatsachen der Mortalität, der Capitalsvermehrung, der Unglücksfälle etc. Durchschnittsrechnungen über Volksvermehrung, Steuerkraft eines Landes, Armee-Ersatz, Lebens- und Rentenversicherungen, Schiffs-, Güter- und Hypotheken-Versicherungen, Lotterie-Anlehen basirt werden.

---

[1]) Condorcet, geb. 1743 zu Ribemont, gest. 1794 zu Bourg la reine.

Diese 2. Aufgabe der Wahrscheinlichkeits-Rechnung ist nicht minder interessant und bedeutsam, und wir bedauern, dass die engen Grenzen dieser Abhandlung ein näheres Eingehen auf dieselbe nicht gestatten. Wir müssen uns begnügen, hier auf die Arbeiten Moivres, Halley, Condercet, Laplace, Lacroix, Deparcieux, Kersenboom, Littrow, Moser, Fries, Quetelet, Zillmer etc. zu verweisen.

§. 6.

Indem wir uns nunmehr der geschichtlichen Entwicklung unseres eigentlichen Thema's, der in No. 1 des vorigen §. 5 genannten Richtung der Wahrscheinlichkeits-Lehre zuwenden, müssen wir mit den Versuchen und Verfahren Lagrange's,[1]) die Aufgabe zu lösen, beginnen.

Wenn wir auch Gauss[2]) als den eigentlichen Erfinder der Methode der kleinsten Quadrate anzusehen haben, so müssen wir doch zugestehen, dass er die Idee: „die Wahrscheinlichkeits-Lehre auf Ausgleichungs-Berechnungen von Naturbeobachtungen anzuwenden" bereits vorfand.

Der Schöpfer dieser Idee ist jedenfalls Lagrange; denn er veröffentlichte ums Jahr 1772 eine seiner wichtigsten Arbeiten: „Ueber die Ausgleichung von Beobachtungsfehlern", „Memoire sur l'utilité de la methode de prendre le milieu entre les resultats de plusieurs observations". Seine Methode kann, wie wir sehen werden, nicht mit derjenigen Gauss' verwechselt werden, denn Lagrange rieth, den wahrscheinlichsten mittleren Fehler aus n Beobachtungen folgendermassen zu bestimmen. Es seien a, b, c, d die bezüglichen Fälle, in denen die Fehler p, q, r, s vorkommen. Ist dann M der Coefficient von x^{μ} in der Entwicklung von $(a x^p + b x^q + c x^r + d x^s + \cdots)^n$; so ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der Fehler $= \mu$, also der mittlere Fehler $= \frac{\mu}{n}$; $W = \frac{M}{(a + b + c + \cdots)^n}$. Es handelt sich nun darum, den Werth von μ zu bestimmen, für welchen M ein Maximum ist, indem man von der Voraussetzung ausgeht, dass der kleinste Fehler die grösste Wahrscheinlichkeit hat.

Zu umfassenderen, praktischen Anwendungen brachte Lagrange seine Methode nicht, einmal weil ihm dazu nicht die tägliche unmittelbare Veranlassung wie Gauss, bei dessen astronomisch. Berechnungen geboten war, und anderntheils, weil überhaupt in seinem Wesen die abstracte Auffassung und Discussion der Functionen vom rein algebraisch-arithmetischen Standpunkte lag. Dabei soll nicht verkannt werden, dass gerade diese seine Auffassung und Darstellung der Functionen-

---

[1]) Lagrange, geb. 25. Jan. 1736 zu Turin, gest. 10. April 1813 in Paris. 1766—1787 in Berlin.

[2]) Gauss, geb. 30. April 1777 zu Braunschweig, gest. 23. Februar 1855 zu Göttingen.

Theorie das bedeutungsvollste Moment zur Neugestaltung der höheren Analysis und Mechanik wurde.

Wenige Jahre nach Lagrange tritt Daniel Bernoulli mit seiner Abhandlung auf, betitelt: „Dijudicatio maxime probabilis plurium observationum discrepantium atque verisimillima inductio inde formanda,“ Petersburg 1777, in welcher er die Wahrscheinlichkeits-Rechnung auf das Gebiet der Methode kleinster Quadrate hinüberzuziehen versucht. Für die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers giebt er den Ausdruck: $\sqrt{r^2 - e^2}$, wo r eine Constante und e einen Fehler bezeichnen. Aus einer Anzahl von Beobachtungen wird nach ihm das beste Resultat gefunden, in dem Falle, wo das Product der Wahrscheinlichkeiten aller Fehler zu einem Maximum wird.

§. 7.

Abgesehen von den interessanten und lehrreichen Untersuchungen über die beste Methode von Ausgleich-Rechnungen für astronomische und geodätische Beobachtungen eines Lacaille, Delambre, Biots hat zuerst Laplace[1]) in seiner Mecanique celeste Tom III. chap. V. Paris 1800 bis 1806; bei Gelegenheit der Untersuchungen über Form und Grösse des Erdmeredians eine Methode entwickelt, nach welcher er verlangt:

1) dass die Summe der Fehler mit ihrem zugehörigen Vorzeichen addirt, gleich Null; und
2) dass die Summe dieser Fehler, wenn man sie sämmtlich positiv setzt, ein Kleinstes sei.

Dass gerade die letztere Bedingung unpraktisch und unmathematisch ist, bedarf kaum einer näheren Erörterung, indess erproben wir seine Methode an einem Zahlen-Beispiel. Es sei ein Winkel

durch 15 Messungen gefunden				Fehler für 12,36″;		dsgl. 12,35 als Mittel	
1. Messung	39° —	20′ —	12,41″	7 Fehler pos. (Summa +21)	+5	7 Fehler pos. (Summa +28)	+6
2. „	39	20	12,40″		+4		+5
3. „	39	20	12,40″		+4		+5
4. „	39	20	12,39″		+3		+4
5. „	39	20	12,38″		+2		+3
6. „	39	20	12,38″		+2		+3
7. „	39	20	12,37″		+1		+2
8. „	39	20	12,35″	8 Fehler neg. (Summa—21)	—1	8 Fehler neg. (Summa—13)	±0
9. „	39	20	12,35″		—1		±0
10. „	39	20	12,34″		—2		—1
11. „	39	20	12,34″		—2		—1
12. „	39	20	12,33″		—3		—2
13. „	39	20	12,33″		—3		—2
14. „	39	20	12,32″		—4		—3
15. „	39	20	12,31″		—5		—4

[1]) Laplace, geb. 23. März 1749 zu Beaumont sur Auge, gest. 5. Mai 1827 zu Paris.

Nimmt man nämlich ausser den unbestreitbar richtigen Graden, Minuten und vollen Secunden, als den wahrscheinlichsten Werth der unbekannten Grösse des Winkels 0,36″ an, so würde:

ad 1) allerdings die Summe der übrigbleibenden Fehler mit ihren zugehörigen Vorzeichen summirt

$$+21-20=0$$

ergeben; während

ad 2) die Summe dieser Fehler sämmtlich positiv gesetzt:

$$+21+21=+42$$

kein Minimum ergiebt, welches mindestens 31 sein müsste.

Hätte man indessen 0,35″ als den wahrscheinlichsten Werth der Unbekannten angenommen, so erhielte man:

ad 1) Summe der übrig gebliebenen Fehler

$$+28-13=+15; \text{ anstatt } =0.$$

ad 2) Summe der übrig gebliebenen Fehler, Letztere alle positiv

$$+28+13=+41$$

ebenfalls kein kleinster Fehler.

Man versteht in der That nicht, wie Laplace sich dies gedacht habe.

Seine Methode, als unhaltbar erkannt, wurde von ihm selbst aufgegeben, und in seinem späteren Werke: Theorie analytique des probabilités I Edit. Paris 1812 Tom II. Chap. IV. schliesst er sich der Gauss'schen Theorie, welcher inzwischen 1801 seine Abhandlung Disquisitiones arithmet. Leipzig 1801 veröffentlicht hatte, vollkommen an, und entlehnt von Gauss den Schluss: „dass die Wahrscheinlichkeits-Rechnung darauf hinwiese, dass derjenige mittlere Werth gegebener Beobachtungsfehler als der wahrscheinlichste, und dem wahren Resultate als am nächsten liegend zu betrachten sei, der die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler zu einem Minimum mache."

§. 8.

Einen glücklichen Abschluss aller früheren, mehr oder minder unbrauchbaren Versuche über Ausgleichungs-Rechnungen für astronomische und geodätische Beobachtungen machte Gauss 1795, indem er ein neues, jetzt allgemein als praktisch-bestes angenommen und theoretisch als richtig erwiesenes Princip an die Stelle setzte. Vornehmlich trat er dem Princip der kleinsten Summe der übrig bleibenden Fehler entgegen und beseitigte damit das unmathematische Verfahren des willkürlichen Zeichenwechsels. Dann aber auch trug sein neues Princip dem bis dahin vernachlässigten Umstande Rechnung: „dass die Beobachtungsfehler nicht im einfachen, sondern im quadratischen Verhältnisse ihrer Grössen unwahrscheinlich sind. Nach Gauss ist die Wahrscheinlichkeit einen Fehler, z. B. von 0,10″ zu begehen, gegenüber einen von 0,05″ nicht $= \frac{1}{2}$, sondern $= \left[\frac{1}{2}\right]^2 = \frac{1}{4}$., weil erfahrungsmässig gewisse Fehlergrössen geradezu

unmöglich sind, und in demselben Sinne grössere Fehler auch im höheren Verhältnisse als dem directen ihrer Grösse, unwahrscheinlich sein müssen, als kleinere. Diesem Princip gemäss dürfte man zur Verfeinerung der Rechnung die Fehler auch zur 3. 4. und höheren Potenz in dieselbe einführen; da indess die höheren Potenzen der Fehler die Rechnung unverhältnissmässig erschweren würden, ohne die Genauigkeit wesentlich zu fördern, so ist Gauss bei den Quadraten der Fehler stehen geblieben.

Insofern als Gauss seine neue Theorie klar und präcise begründete und in dem von ihm vorgeschlagenen und seit nunmehr $^3/_4$ Jahrhundert benutzten Gange der Rechnungen bewies, dass man hinreichende Genauigkeit mit den Quadraten der Fehler erziele, ist er allerdings als der einzige und wahre Erfinder der Methode der kleinsten Quadrate anzusehen, und nicht Laplace, wie von Manchen angenommen wird. Letzterer Irrthum kann nur daher rühren, dass damals als Laplace sein Werk „Theorie analytique des Probabilités" herausgab, 1812 von Gauss nur zerstreute Abhandlungen existirten. Und sonderbarer Weise giebt es bis heute noch keine deutsche, sondern nur eine französische Ausgabe von J. Bertrand Paris 1855 mit Gauss' Genehmigung herausgegeben, welche die betreffenden Gauss'schen Schriften gesammelt und geordnet hat.

§. 9.

Nach Gauss bildeten Bessel, Enke, Schumacher, Hansen die Methode für astronomische und geodätische Zwecke weiter aus und passten sie den verschiedenen Zwecken an. Die Litteratur über diese Materien ist so umfassend, dass wir unmöglich die erwähnten Autoren einzeln verfolgen können. Wir glauben übrigens, dass die gegebene allgemeine Uebersicht als Einführung in die Materie genügen wird.

II. Abschnitt.

Principien der Wahrscheinlichkeits-Rechnung und Methode der kleinsten Quadrate.

§. 1.

Allgemeine Bedingungen der Zulässigkeit.

Für solche Messungen, deren Resultate durch die Methode der kleinsten Quadrate soll verbessert werden, gilt als Vorbedingung, dass mehr Messungen gemacht sein müssen, als zur Erlangung des Resultats mathematisch nothwendig sind.

Wären z. B. zur Construction oder Berechnung eines Systems von Dreiecken, Vielecken etc. bei geodätischen Vermessungen nur grade ebenso viele Linien und Winkel gemessen als zu ihrer Bestimmung mathematisch nothwendig sind, so hätte man keinen Maassstab für die Güte der Messung, sind aber überschüssige Messungen vorhanden, z. B. in

einem Dreieck 1 Seite und alle 3 Winkel, so gewinnt man, je nachdem die Berechnung aus verschiedenen Messungen eine grössere oder geringere Uebereinstimmung zeigt, die Ueberzeugung von der grösseren oder geringeren Güte der Messungen.

Mit dieser blossen Ueberzeugung wird man indess sich nicht begnügen wollen, man wird vielmehr dahin streben, alle gemachte Messungen bei Bestimmung der unbekannten Stücke mitwirken zu lassen, und diese Bestimmung dadurch um so genauer zu erhalten; man wird suchen dieselbe so zu machen, dass sie allen vorhandenen Messungen am besten entspricht, dass die gemachte Bestimmung, wie man sich ausdrückt, unter allen möglichen Bestimmungen die grösste Wahrscheinlichkeit hat.

Wären alle Messungen, z. B. die aller 8 in einem Viereck von den Seiten und Diagonalen gebildeten Winkel absolut richtig, so würde, wenn man von einer Seite als Basis ausgeht, der Werth einer 2. Seite immer derselbe sein, man möchte zu ihrer Bestimmung aus jenen 8 Winkeln wählen, welchen man wolle. Da die absolute Richtigkeit indess nie vorhanden ist, so bleibt nur übrig anzunehmen, dass jene 8 gemessenen Winkel mit kleinen Fehlern behaftet waren und zwar so, dass, wenn man die gemessenen Winkel um diese kleinen Quantitäten corrigirte, ein neues verbessertes System an Winkeln entstände, welches mit den absolut richtigen das gemein hat, dass jede Seite durch Anwendung beliebiger aus diesem System gewählter Winkel aus einer gegebenen Seite als Basis berechnet, nur einen einzigen Werth erhält, die Figur also eine mathematisch genaue wird.

Die Wahrscheinlichkeits-Rechnung soll nun lehren, welches unter all den zu wählenden verbesserten Systemen das Wahrscheinlichste, jenen wirklichen Messungen am meisten Entsprechende ist, oder, was dasselbe ist, welches sind die wahrscheinlichsten Fehler der gemessenen Winkel, die das Viereck bilden.

Die Cardinalbedingung der Zulässigkeit unserer Methode ist also: „es müssen mehrfache gleichartige Beobachtungen desselben Ereignisses vorhanden sein, aus welchem sich ein System der wahrscheinlichen bei den Beobachtungen begangenen Fehler formiren lässt.

§. 2.

Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitslehre.

a) Unter Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses versteht man das Verhältniss der Anzahl derjenigen Fälle m, die das Ereigniss herbeiführen, zur Anzahl aller möglichen Fälle n, d. h. $W : 1 = m : n$ oder auch $W = \frac{m}{n}$, z. B. 1 Würfel kann, wenn er geworfen wird, 6 verschiedene Würfe, also $n = 6$ geben; aber er

kann nur einmal jede Zahl geben, oder m nur einmal vorhanden, $m = 1$. Die Wahrscheinlichkeit, ein Ass zu werfen, ist daher $= \frac{1}{6}$, die kein Ass zu werfen $\frac{5}{6}$, die Summa beider Grössen umfasst alle möglichen Fälle $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$, oder die Gewissheit, dass irgend eine Seite des Würfels nach oben gerichtet sein wird. Die Gewissheit ist nach der eingeführten Bezeichnung also immer $= 1$.

b) Die gegebene Erklärung setzt voraus, dass alle einzelnen Fälle gleich möglich sind. Findet dies nicht statt, so muss man die Möglichkeit ihres Eintreffens ermitteln, und durch Verhältnisszahlen bezeichnen. Die Wahrscheinlichkeit ist dann gleich der Summe aller dieser Verhältnisszahlen oder ächten Brüche, welche die Möglichkeit des Eintreffens derjenigen Fälle bezeichnen, die das Ereigniss herbeiführen.

Z. B. eine Münze mit den beiden Seiten A und B wird in die Höhe geworfen, wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, in zwei Würfen einmal A oben zu werfen.

Es sind 4 mögliche Fälle: A im ersten und zweiten Wurf
A „ „ B „ „
B „ „ A „ „
B „ „ „ „ „

Hiervon sind die ersten drei günstige Fälle, man hat also die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{3}{4}$.

Man kann aber bei diesem Spiele auch folgende Eintheilung machen: A im ersten Wurf, wobei die Wette gewonnen und das Spiel beendet ist; B im ersten, A im zweiten Wurf; B in beiden Würfen.

Hiernach würde anscheinend die Wahrscheinlichkeit nur $\frac{2}{3}$ betragen, es ist aber klar, dass die Möglichkeit des Eintreffens des ersten Falles, also seine Wahrscheinlichkeit eben so gross ist, als die der beiden folgenden zusammen, d. h. gleich $\frac{1}{2}$, während die der beiden anderen nur $\frac{1}{4}$ ist; addirt man also die Wahrscheinlichkeit der beiden günstigen ersten Fälle, so bekommt man wieder $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

c) Wenn zwei oder mehrere Ereignisse von einander **unabhängig** sind, so ist die Wahrscheinlichkeit ihres gleichzeitigen Eintreffens gleich dem Product ihrer einzelnen Wahrscheinlichkeiten.

Beispiel. Man hat 2 Urnen, in jeder schwarze und weisse Kugeln. Es mögen in der 1. m schwarze und n weisse, in der 2. m_1 schwarze und n_1 weisse sein, so ist die Wahrscheinlichkeit, aus der 1. Urne eine weisse Kugel zu ziehen $= \frac{n}{m + n}$, und für eine weisse aus der 2. Urne $= \frac{n_1}{m_1 + n_1}$, daher die Wahrscheinlichkeit, bei einmaligem Greifen in beide Urnen nur weisse Kugeln zu ziehen $= \frac{n}{m + n} \cdot \frac{n_1}{m^1 + n_1}$.

Die Richtigkeit dieser Regel ergiebt sich sehr leicht. Indem nämlich unter den $m + n$ möglichen Fällen nur n weisse Kugeln sind, also nur n günstige Fälle, so werden nur $\frac{n}{m + n}$ der ganzen Anzahl der Fälle eine weisse Kugel geben. Ist aber der erste Zug ein günstiger, so ist der zweite noch ungewiss, und unter den hier möglichen $m_1 + n_1$ Fällen nur n_1 günstige. Von der ganzen Anzahl der möglichen Fälle, oder von der Gewissheit führt daher nur der $\frac{n_1}{m_1 + n_1}$ te Theil des $\frac{n}{m + n}$ ten Theils das gewünschte Ereigniss zweier weissen Kugeln herbei, oder die Wahrscheinlichkeit hierfür ist $\frac{n}{m + n} \cdot \frac{n_1}{m_1 + n_1}$.

Dieser Grundsatz gilt ebenso für 3 und mehr Urnen, und wenn man in allen diesen gleich viel schwarze und weisse Kugeln m und n denkt, für das wiederholte Eingreifen in eine Urne. Bei zweimaligem Ziehen aus einer Urne hat man demnach für die Wahrscheinlichkeit, nur weisse Kugeln zu ziehen $\left[\frac{n}{m + n}\right]^2$; bei p maligem Ziehen $\left[\frac{n}{m + n}\right]^p$.

d) Wenn 2 Ereignisse von einander **abhängig** sind, so ist die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens beider gleich dem Product aus der Wahrscheinlichkeit des ersten mal der Wahrscheinlichkeit, dass nach dem Eintreffen des ersten Ereignisses das zweite gleichfalls noch eintrifft.

Beispiel. Man hat 3 Urnen, von denen in einer nur schwarze, in zweien nur weisse Kugeln sind; man weiss indess nicht, in welcher die schwarzen sind, so würde die Wahrscheinlichkeit, dass si in einer bestimmt bezeichneten, z. B. in der 3. sind, $= \frac{1}{3}$ sein.

Man kommt indess zu demselben Resultat, wenn man die Wahrscheinlichkeit sucht, in den ersten beiden Urnen nur weisse Kugeln

zu finden. Es ist nämlich die Wahrscheinlichkeit, in der ersten Urne weisse Kugeln zu finden $= \frac{2}{3}$. Hat man eine Urne erfasst, die weisse Kugeln enthält, so ist die Wahrscheinlichkeit unter den beiden bleibenden Urnen die mit weissen Kugeln zu treffen $= \frac{1}{2}$; die Wahrscheinlichkeit also, zweimal eine Urne mit weissen Kugeln zu treffen $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$. Hiermit hätten wir in Kürze die uns für Entwicklung der Methode interessirenden Fälle gegeben.

§. 3.

Vorkommen eines Fehlers, abhängig von seiner Grösse. Wahrscheinlichstes System von Fehlern.

Die Fehler bei Messungen können folgender Art sein:

1) Die sogenannten constanten Fehler, wie z. B. Unrichtigkeit von Maassstäben, Colimationsfehler der Fernrohre etc.; diese müssen aus den Messungen entweder durch Correction, wo es möglich ist ihre Grösse zu bestimmen, oder durch die Anordnung der Beobachtungen, indem man diese so anstellt, dass die constanten Fehlerursachen abwechselnd positiv und negativ in gleicher Grösse wirken, und sich aufheben, entfernt werden; auf sie bezieht sich also die folgende Theorie nicht.

2) Die zufälligen Fehler, jene kleinen Fehler, die man unbewusst in die Beobachtungen hineinträgt. Sie sind und bleiben stets im Resultate, aber eben ihre Zufälligkeit bringt es mit sich, dass sie bald grösser, bald kleiner, bald positiv, bald negativ sein werden, ein gewonnenes Resultat also eben so gut zu gross als zu klein sein kann.

Ein anderes Kennzeichen dieser Fehlersorte ist noch, dass grössere Fehler stets weniger wahrscheinlich sind, als kleinere. Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers von einer bestimmten Grösse (v) hängt also offenbar von seiner Grösse ab; sie ist eine Function dieser Grösse, die wir $\varphi(v)$ nennen wollen

Beispiel zur Erläuterung. Es wird wiederholt mit demselben Gewehr und unter denselben Umständen nach einer Scheibe geschossen, die zu beiden Seiten der Mittellinie sich ins Unendliche ausdehnt, und von Fuss zu Fuss durch Vertical-Linien eingetheilt ist. Dann werden die meisten Schüsse, wenn eben das Gewehr keine constanten Fehler hat, in der Mitte der Scheibe zwischen den Strichen (0—1) liegen, weniger Treffer schon zwischen (1 und 2) auf jeder Seite, noch weniger zwischen (2 und 3) und so fort, endlich über eine gewisse Grenze hinaus gar kein Treffer mehr.

Diese Schiessprobe würde nun die Wahrscheinlichkeit begründen, mit der man bei fernerem Schiessen ein gewisses Resultat zu erwarten hat.

5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5

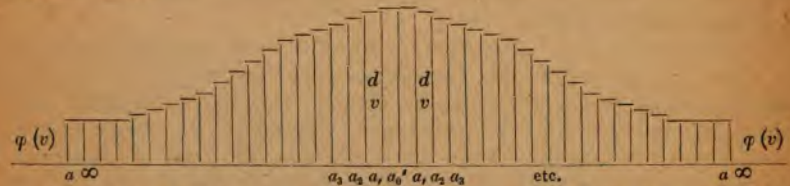
$n_4^{\,5}$	$n_3^{\,4}$	$n_2^{\,3}$	$n_1^{\,2}$	$n_0^{\,1}$	$n_0^{\,1}$	$n_1^{\,2}$	$n_2^{\,3}$	$n_3^{\,4}$	$n_4^{\,5}$

5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5

Die Anzahl der gethanen Schüsse möge sehr gross und $= n$ sein, die Anzahl der Treffer zwischen 0 und 1 auf jeder Seite $= n_0^{\,1}$
1 „ 2 „ „ „ $= n_1^{\,2}$
2 „ 3 „ „ „ $= n_2^{\,3}$
etc. etc. etc.,
wobei angenommen ist, dass zu beiden Seiten der Mittellinie alles gleich sei; $n_0^{\,1}, n_1^{\,2}, n_2^{\,3} \ldots$ nehmen, absolut genommen, ununterbrochen gleichmässig ab, bis sie $= 0$ werden.

Man sieht dann, dass die Wahrscheinlichkeit bei fernerem Schiessen einen Fehler zwischen 0 und 1 zu begehen $= \frac{n_0^{\,1}}{n}$, aber $>$ als die einen solchen zwischen 1 und 2 zu begehen, nämlich $>$ als $\frac{n_1^{\,2}}{n}$, diese wieder grösser als die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers zwischen 2 und 3 Fuss, nämlich $>$ als $\frac{n_2^{\,3}}{n}$ und so fort. Die Wahrscheinlichkeit des Fehlers nimmt also mit der Grösse ab.

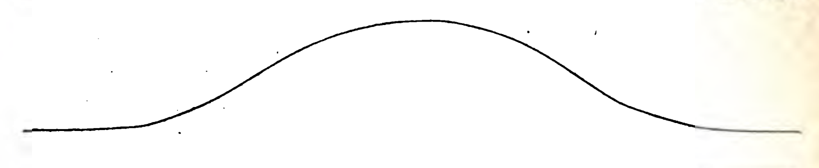
Aus diesem letzten Satz lässt sich eine Curve der Fehlervertheilung graphisch folgendermassen construiren.[1]) Die Abcissenaxe bilde die Längenrichtung der Scheibe, wo die gleichen, den einzelnen Fussen der Scheibe entsprechenden Abstände der Punkte $a_0\ a_1\ a_2\ a_3$, die Grenzen der Fehler zwischen 0 und 1, 1 und 2, 2 und 3 Fuss repräsentiren.



In den Punkten a_1, a_2, a_3 errichte man Ordinaten, die der Wahrscheinlichkeit des Fehlers, dem sie angehören, also $\frac{n_0^{\,1}}{n}, \frac{n_1^{\,2}}{n}, \frac{n_2^{\,3}}{n}$ proportional sind; verbindet man die Endpunkte dieser Ordinaten, so

[1]) Die sogenannte Wahrscheinlichkeitscurve.

bekommt man eine Linie, die das Gesetz des Verhältnisses der Wahrscheinlichkeit eines Fehlers zu seiner Grösse darstellt, und die in eine continuirliche Curve übergeht, wenn man die Grenzen nicht von 1 zu 1 Fuss, sondern nur unendlich kleine Grössen dv von einander entfernt



sein lässt, nach der Theorie der Differential-Rechnung, welche als bekannt vorausgesetzt wird.

Die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler von der Grösse (v) zu begehen, ist nach den vorigen, die Ordinate $\varphi(v)$; die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler von der Grösse (v bis $v + d\,v$) zu begehen, ist die Summe aller Ordinaten, oder das kleine Rechteck $\varphi(v)\,d\,v$; wenn dann n_i die Anzahl der Fehler zwischen den beiden Ordinaten $\varphi(v)$ und $\varphi(v + d\,v)$, wie vorhin $n_0{}^1$ zwischen a_0 und a_1 darstellt, so ist also:

$$\varphi(v) = \frac{n_i}{n} \text{ oder } n_i = n\,\varphi(v)$$

und zwischen 2 Grenzen a und b die Anzahl der Fehler

$$n_{a_0}^{a\infty} = n\int_{a_0}^{a\infty} \varphi(v)\,d\,v.$$

Dass bei einem einzelnen Schuss, um bei unserem Beispiel zu bleiben, überhaupt ein Fehler von $-\infty$ bis $+\infty$ (der also auch Null) begangen wird, ist die Gewissheit, oder $= 1$; die Wahrscheinlichkeit dafür ist aber auch das kleine Rechteck $\varphi(v)\,d\,v$ über die ganze Curve ausgedehnt. Wir bekommen also sofort als charakteristisches Zeichen der Function $\varphi(v)$ das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(v)\,d\,v = 1.$$

Gehen wir von diesem Beispiel zu einer Messung über. Eine Linie sei eine beliebige Anzahl n mal gemessen worden, ihre unbekannte wahre Länge sei L, so sind, wenn $l_0, l_1, l_2, \ldots$ die aus den Messungen hervorgegangenen Längen, die einzelnen Fehler der Messungen $L - l_0$, $L - l_1$, $L - l_2 \ldots.$

Von diesen mögen beispielsweise zwischen 0 und 1 Linie liegen $m_0{}^1$
„ 1 „ 2 „ „ $m_1{}^2$
„ 2 „ 3 „ „ $m_2{}^3$

so ist die Wahrscheinlichkeit, dass wenn man mit denselben Hilfsmitteln die Messung noch einmal macht, und der zu erwartende Fehler

zwischen 0 und 1 Linie liegen soll $= \frac{m_0^{\ 1}}{n}$, wenn er liegen soll

„ 1 „ 2 „ „ „ $= \frac{m_1^{\ 2}}{n}$, „ „ „

„ 0 „ 2 „ „ „ $= \frac{m_0^{\ 1} + m_1^{\ 2}}{n}$ u. s. w.,

woraus die Aehnlichkeit des Vorkommens der Fehler bei Messungen mit dem in unserem Beispiel beim Schiessen hervorgeht.

Doch ist hierbei noch eins zu bemerken; den wahren Werth L der Länge kennt man insgemein nicht, sondern leitet ihn, wie wir später sehen werden, aus den Beobachtungen ab; dieser abgeleitete Werth (L), wie wir ihn nennen und bezeichnen wollen, hat eine charakteristische Eigenschaft. Er giebt nicht die wahren Fehler $L - l_0$. $L - l_1 \ldots$, sondern nur die abgeleiteten $(L) - l_0$, $(L) - l_1 \ldots$, er ist nicht der absolut wahre Werth der gemessenen Grösse, sondern nur der wahrscheinlichste, dessen Kennzeichen darin besteht, dass das System der abgeleiteten Fehler, $(L) - l_0 \ldots$ die grösste Wahrscheinlichkeit hat. Kennen wir diese Fehler der Reihe nach, v, v_1, v_{11}, so ist die Wahrscheinlichkeit (W) ihres gleichzeitigen Eintreffens, d. h., dass diese Fehler gleichzeitig zwischen den Grenzen (v und $v + dv$), $(v_1 + v_1 + dv_1)$, $(v_{11} + v_{11} + dv_{11})$ etc. liegen

$$W = \varphi(v) \cdot \varphi(v_1) \cdot \varphi(v_{11}) \cdot dv \cdot dv_1 \cdot dv_{11} \cdot \cdots$$

oder wenn man der Kürze halber $\Sigma = \varphi(v) \cdot \varphi(v_1) \cdot \varphi(v_{11})$ setzt.

$$W = \Sigma \cdot dv \cdot dv_1 \cdot dv_{11}$$

Derjenige Werth (L) ist also der wahrscheinlichste, für den die Function Σ ein Maximum wird. Aus dieser Bedingungsgleichung müssen die Fehler $v, v_1, v_{11} \ldots$ und durch ihre Anbringung an den gefundenen Messungen $l_0 . l_1 \ldots$ der wahrscheinlichste Werth (L) gefunden werden.

§. 4.

Aufstellung der Bedingungs-Gleichungen zwischen den Fehlern des wahrscheinlichsten Systems.

Handelt es sich nicht um das directe Resultat einer einfachen Messung, wie im vorigen §, sondern um ein Resultat, welches auf eine bekannte mathematische Theorie sich stützt, so wird die Aufgabe die sein, die willkührlichen Grössen (Zahlengrössen) des Resultats zu bestimmen.

Das gesuchte Resultat erscheint also als eine Function der zu bestimmenden Constanten des Problems.

Beispiel: (L) sei die Länge des einfachen Secunden-Pendels unter irgend einer Breite (ψ), so giebt die mathematische Theorie:

$$L = x + y \sin.^2 \psi.$$

Am Aequator, wo $\psi = 0$, wird $L_0 = x$; d. h. x ist die constante Länge am Aequator. Am Pol, wo $\psi = 90^0$ wird $\sin. \psi = 1$ also $L_{90} = x + y$, (y) ist also die Zunahme vom Aequator zum Pol.

Hätte man die Pendellänge L_1 und L_2 an 2 Orten, deren Breiten ψ_1 und ψ_2, beobachtet, so würde dies grade ausreichen, um x und y zu bestimmen; hat man aber die Beobachtungen an vielen Orten gemacht, dann tritt die Wahrscheinlichkeits-Rechnung ein, um x und y so zu bestimmen, dass sie allen Beobachtungen möglichst gut entsprechen, d. h., dass, wenn man mit den so gefundenen (x) und (y) und den Breiten ψ_1 und ψ_2 .... die zugehörigen (L_1), (L_2), (L_3)... berechnet, und mit den beobachteten L_1, L_2 .... vergleicht, nur Fehler $L_1 - (L_1)$; $L_2 - (L_3)$ übrig bleiben, deren System die meiste Wahrscheinlichkeit hat.

Die Grösse L ist also im Allgemeinen Function von x und y $f(x\,y)$, d. h. der zu bestimmenden Constanten, und zwar können wir, ohne der Allgemeinheit zu schaden, annehmen, dass sie stets, wie hier in unserem Beispiel, eine lineare Function sein wird, da jeder andere Fall sich darauf zurückführen lässt. Man kann dann nämlich aus einigen der Beobachtungen sehr nahe richtige Werthe von x, y ... berechnen, dass die anzubringenden Verbesserungen $\Delta x, \Delta y$ ... so klein sind, dass ihre Quadrate und Producte vernachlässigt werden können.

Gäbe z. B. die Theorie eine Grösse $M = \sin. x$, so nehme man einen nahen richtigen Werth x_0, und nenne die zu findende Grösse $x_0 + x_1$, dann wird $M = \sin. (x_0 + x_1) = \sin. x_0 + \cos. x_0 . x_1$, da man $\cos. x = 1$ und $\sin. x = x$ der Kleinheit von x wegen annehmen kann. $\sin. x_0$ und $\cos. x_0$ sind dann Constante a und b und man hat:

$$M = a + b\,x,$$

also wieder eine lineare Function. Ebenso mit mehreren Unbekannten.

Hat man nun allgemein für eine solche beobachtete Grösse M unter Voraussetzung nahe richtiger Elemente nach der mathematischen Theorie den Werth V gefunden, so wird der vollständige Werth von M, wenn man den nahe richtigen Elementen die Verbesserungen x, y, z giebt, sein:

$$M = V + a\,x + b\,y + c\,z + \cdots\cdot$$

oder wenn wir die bekannte Differenz $V - M = n$ setzen; aus einer

$$\left.\begin{array}{lll} 1) & \text{Beobachtung} & 0 = n + a\,x + b\,y + c\,z + \cdots \\ 2) & \text{dito} & 0 = n_1 + a_1\,x + b_1 y + c_1\,z + \cdots \\ 3) & \text{dito} & 0 = n_{11} + a_{11}\,x + b_{11}\,y + c_{11}\,z + \cdots \\ & & \vdots \end{array}\right\} (1)$$

Sind nun grade eben so viele Beobachtungen da, als unbekannte Verbesserungen x, y, z, so wird man diese finden können, und sie

werden die beobachteten Werthe von M genau wiedergeben. Sind aber mehr Beobachtungen da, als zur Bestimmung von x, y, z Gleichungen nöthig sind, dann giebt es **kein** System von Werthen von x, y, z, welches die Gleichungen (1) genau erfüllt. Was für ein System von x, y, z man auch wählen mag, es wird immer so sein, dass wenn man die gefundenen Werthe in (1) setzt, die Gleichungen nicht Null werden, sondern Fehler $v, v_1, v_{11} \ldots\ldots$ übrig bleiben, die aus (1) mittelst folgenden Gleichungen sich ergeben:

$$\left.\begin{aligned} v &= n + a x + b y + c z + \cdots\cdots \\ v_1 &= n_1 + a_1 x + b_1 y + c_1 z + \cdots\cdots \\ v_{11} &= n_{11} + a_{11} x + b_{11} y + c_{11} z + \cdots\cdots \end{aligned}\right\} (2)$$

wo x, y, z das gewählte System der Unbekannten.

Unter all diesen wählbaren Systemen ist aber eines ausgezeichnet, nämlich dasjenige, welches so beschaffen ist, dass, wenn man seine Werthe von x, y, z in (1) setzt, das System der übrig bleibenden Fehler v, v_1, v_{11} die grösste Wahrscheinlichkeit hat.

Diese Wahrscheinlichkeit ist aber im vorigen § gegeben proportional Σ, und wird mit diesem zum Maximum. Da aber Σ Function von v, v_1, v_{11} und somit von $x, y, z \ldots$ ist, so folgt für das Maximum:

$$\frac{d\Sigma}{dx} = 0; \frac{d\Sigma}{dy} = 0; \frac{d\Sigma}{dz} = 0. \cdots\cdots$$

Die Gleichungen bequemer umgeformt:

$$\frac{1}{\Sigma}\frac{d\Sigma}{dx} = 0; \frac{1}{\Sigma}\frac{d\Sigma}{dy} = 0; \frac{1}{\Sigma}\frac{d\Sigma}{dz} = 0.$$

Die Gleichungen (2) geben **partiell** differentirt:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = a; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = b; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = c;$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = a_1; \quad \frac{\partial v_1}{\partial y} = b_1; \quad \frac{\partial v_1}{\partial z} = c_1;$$

$$\frac{\partial v_{11}}{\partial x} = a_{11}; \quad \frac{\partial v_{11}}{\partial y} = b_{11}; \quad \frac{\partial v_{11}}{\partial z} = c_{11} \text{ u. s. w.}$$

Aus den Werthen von Σ folgt aber:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{1}{\Sigma}\frac{d\Sigma}{dx} = & \frac{d\varphi(v)}{\varphi(v)\,dv} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}; \\ & + \frac{d\varphi(v_1)}{\varphi(v_1)\,dv_1} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x}; \\ & + \frac{d\varphi(v_{11})}{\varphi(v_{11})\,dv_{11}} \cdot \frac{\partial v_{11}}{\partial x}; \\ & \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \end{aligned}$$

$$0 = \frac{1}{\Sigma}\frac{d\Sigma}{dy} = \frac{d\varphi(v)}{\varphi(v)\,dv}\cdot\frac{\mathfrak{d}v}{\mathfrak{d}y};$$
$$+ \frac{d\varphi(v_1)}{\varphi(v_1)\,dv_1}\cdot\frac{\mathfrak{d}v_1}{\mathfrak{d}y};$$
$$+ \frac{d\varphi(v_{11})}{\varphi(v_{11})\,dv_{11}}\cdot\frac{\mathfrak{d}v_{11}}{\mathfrak{d}y};$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$0 = \frac{1}{\Sigma}\frac{d\Sigma}{dz} = \frac{d\varphi(v)}{\varphi(v)\,dv}\cdot\frac{\mathfrak{d}v}{\mathfrak{d}z};$$
$$+ \frac{d\varphi(v_1)}{\varphi(v_1)\,dv_1}\cdot\frac{\mathfrak{d}v_1}{\mathfrak{d}z};$$
$$+ \frac{d\varphi(v_{11})}{\varphi(v_{11})\,dv_{11}}\cdot\frac{\mathfrak{d}v_{11}}{\mathfrak{d}z};$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

setzen wir hierin allgemein der Kürze wegen $\frac{d\varphi(v_{11})}{\varphi(v_{11})\,dv_{11}} = \varphi_1(v)$ und für $\frac{\mathfrak{d}v}{\mathfrak{d}x} \ldots \frac{\mathfrak{d}v}{\mathfrak{d}y} \ldots \frac{\mathfrak{d}v}{\mathfrak{d}z} \ldots$ ihre Werthe, so findet man:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= a\,\varphi_1(v) + a_1\,\varphi_1(v_1) + a_{11}\,\varphi_1(v_{11}) + \cdots \\ 0 &= b\,\varphi_1(v) + b_1\,\varphi_1(v_1) + b_{11}\,\varphi_1(v_{11}) + \cdots \\ 0 &= c\,\varphi_1(v) + c_1\,\varphi_1(v_1) + c_{11}\,\varphi_1(v_{11}) + \cdots \end{aligned}\right\} (3)$$

Wäre nun die Form von $\varphi(v)$ bekannt, so könnte man $\varphi_1(v)$ finden, hierin die Werthe von v aus (2) substituiren; dann gehen die Gleichungen (3) in Gleichungen zwischen x, y, z über und da es eben so viele als Unbekannte x, y, z vorhanden sind, so würden sie zur Bestimmung von x, y, z, den wahrscheinlichsten Werthen der Correction ausreichen, somit auch zu der von M für jede Beobachtung, die von dem beobachteten Werthe aber um etwas abweichen wird; wir werden später sehen, wie sich hieraus ein Maassstab für die Güte der Beobachtung ergiebt.

§. 5.

Form der Function $\varphi(v)$, Princip des arithm. Mittels.

Hat man eine grosse Zahl von Beobachtungen einer sich stets gleich bleibenden Grösse, auf jede dieser Beobachtungen dieselbe Sorgfalt verwendet, so dass kein Grund vorhanden ist, einer besonderen Beobachtung einen grösseren Werth beizulegen, als einer anderen, dann wird nothwendig das arithmetische Mittel der wahrscheinlichste Werth sein müssen. Ist das Princip des arithmetischen Mittels hin-

reichend, die Bedeutung von $\varphi(v)$ zu erklären, dann ist die Aufgabe gelöst; ist jenes als richtig anerkannt, so wird auch die daraus gefolgerte allgemeine Auflösung als richtig anerkannt werden müssen.

Für das arithmetische Mittel fallen y, z fort, es bleibt nur eine Unbekannte (x) übrig, deren Coëfficienten a, a_1, a_{11} man durch Division sämmtlich in 1 verwandeln kann; b, b_1, b_{11}, c, c_1, c_{11} .... sind Null.[1])

Beispiel. Es sei die Grösse g der Schwere für einen bestimmten Beobachtungsort durch Pendelversuche zu bestimmen.

Man hat allgemein, wenn T eine Schwingungsdauer und l die Länge des einfachen Pendels ist:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

setzen wir $g = g_0 + x$, wo g ein Näherungswerth aus einer Beobachtung von T abgeleitet, so hat man:

$$g = g_0 + x = \frac{\pi^2 . l}{T^2} \text{ (unsere Gleichung } V + x = M)$$

$$0 = g_0 - \frac{\pi^2 . l}{T^2} + x \text{ nach der Bezeichnung des vorigen §;}$$

$$\text{für 1. Beob.: } 0 = n + x; \left[\text{also: } n = g_0 - \frac{\pi^2 . l}{T^2}\right]$$

$$\text{für 2. Beob.: } 0 = n_1 + x; \left[\text{also: } n_1 = g_0 - \frac{\pi^2 . l}{T_1^{\,2}}\right]$$

Die Gleichungen (3) des vorigen § geben dann für diesen Fall

$$0 = \varphi_1(v) + \varphi_1(v_1) + \varphi_1(v_{11}) + \cdots$$

so viel Glieder als Beobachtungen. Aus dieser Gleichung muss dem arithmetischen Mittel zufolge sein:

$$x = -\frac{1}{m}\left\{n + n_1 + n_{11} + \cdots\right\}$$

und zwar wenn (m) einen ganzen positiven Werth hat.

Wir wollen nun den besonderen Werth annehmen, dass alle Beobachtungen ausser einer denselben Werth gegeben haben, so dass

$$n_1 = n_{11} = n_{111} = \cdots\cdots$$

und n soll abweichen und zwar so, dass

$$n = n_1 + u; \text{ so wird: } x = -n_1 - \frac{1}{m} u$$

Zieht man diesen aus der Supposition des arithmetischen Mittels gewonnenen wahrscheinlichsten Werth von x von jeder Beobachtung ab, so findet man die einzelnen Fehler:

---

[1]) Dr. Ph. Fischer's Lehrbuch der höheren Geodäsie, Giessen 1846. I. Abschn. I. Cap.

$$v = -n - x = -\frac{m-1}{m} \cdot u$$

$$v_1 = -n_1 - x = +\frac{1}{m} \cdot u$$

$$v_{11} = -n_1 - x = +\frac{1}{m} \cdot u$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$v^{m-1} = -n_1 - x = +\frac{1}{m} \cdot u,$$

und da $v_1 = v_{11} = v_{111} = \cdots v^{m-1}$, so wird durch Summirung:
$v + (m-1) v_1 = 0.$

Wir hatten aber, wenn wieder $v_1 = v_{11} = \ldots$
$\varphi_1(v) + (m-1)\varphi_1(v_1) = 0$
der Identität beider Gleichungen für dasselbe Problem, und jeder Werth von m ist nur möglich, wenn man hat:
$\varphi_1(v) = \pm k v$, wo k eine beliebige Constante, und folgerecht $\varphi_1(v_1) = \pm k v_1$.

Es war nun $\varphi_1(v) = \frac{d\varphi(v)}{\varphi(v)\, dv}$, daher auch $\frac{d\varphi(v)}{\varphi(v)\, dv} = \pm k v$

$\frac{d\varphi(v)}{\varphi(v)} = \pm k v \,.\, dv$ und integrirt:

$$\log \varphi(v) = \pm \frac{1}{2} k \,.\, v^2 + \log C.$$

$$\varphi(v) = C e.^{+\frac{k v^2}{2}}$$

Soll nun die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers (v), also $\varphi(v)$ mit der Grösse des Fehlers abnehmen, so müssen wir das positive Zeichen im Exponenten verwerfen, und finden, wenn wir $\frac{k}{2} = -h^2$ setzen:
$\varphi(v) = C \,.\, e^{-h^2 . v^2}$.
Zur Bestimmung der Constanten C dient die Gleichung:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(v) \cdot dv = 1$$

wie in §. 3 bewiesen. Hierdurch wird für den speciellen Fall derartiger Beobachtungen, dass das wahrscheinlichste Resultat durch das arithmetische Mittel gefunden werden könne:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{h^2 . v^2} \cdot dv = 1;$$

man findet hieraus $C\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 . v^2} \cdot dv = 1$, und da $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \cdot dt = \sqrt{\pi}$;

wenn man für $h\,v = t$ setzt; der Vereinfachung halber, also für $d\,v = \frac{d\,t}{h}$

$$\frac{C}{h}\sqrt{\pi} = 1 \qquad \text{und } C = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$$

wodurch: $\varphi(v) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 . v^2}$ als Gleichung der Curve deren Ordinaten $\varphi(v)$ die Wahrscheinlichkeit der Fehlervertheilung ausdrücken. Die Bedeutung der Constanten h wird später erläutert.

§. 6.

Einführung des Werthes von $\varphi(v)$ in die Summationsformel Σ.

Wir könnten nun kurz den Werth von $\varphi_1(v) = -k\,v = -2\,h^2\,v^2$ in die Gleichungen (3) einführen; setzen wir dann für v seinen Werth $n + a\,x + b\,y + c\,z + \ldots$, und ebenso für $v_1, v_{11} \ldots$, so bekämen wir die Gleichungen zur Bestimmung von x, y, z. Wir wollen aber etwas weiter zurückgreifen, um gleich die Erklärung, Methode der kleinsten Quadrate mit aufzunehmen; selbstredend kommen wir zu denselben Endgleichungen.

Setzen wir in Σ §. 3 den Werth für $\varphi(v)$ so wird:

$$\Sigma = \frac{h^n}{\sqrt{\pi^n}} \cdot e^{-h^2 \left\{ v^2 + v_1{}^2 + v_{11}{}^2 + v_{111}{}^2 + \ldots \right\}}$$

und somit zum Maximum, wenn, wie es der wahrscheinlichste Werth erheischt, der Exponent ein Minimum ist, das heisst wenn:

$$v^2 + v_1{}^2 + v_{11}{}^2 + v_{111}{}^2 + \ldots \text{ ein Minimum.}$$

Derjenige Werth der zu bestimmenden Grösse ist also der wahrscheinlichste,

für welchen die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler ein Kleinstes ist.

Nach dieser Bedingung hat die ganze Methode den Namen

Methode der kleinsten Quadrate.

Setzt man in der Summe der Quadrate für v, v_1, $v_{11} \ldots$ ihre Werthe aus den Gleichungen (2) und zur Abkürzung

$$2\,\Omega = (n + a\,x + b\,y + c\,z\,.\,.)^2 + (n_1 + a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z + .\,.)^2 + (n_{11} + a_{11}\,x + b_{11}\,y + c_{11}\,z + .\,.)^2$$

$\Sigma = e^{-h^2 (v^2 + v_1{}^2 + v_{11}{}^2 + v_{111}{}^3 + \ldots)}$, um mit 3 Unbekannten abzuschliessen

$$= e^{-h^2((n + ax + by + cz \ldots)^2 + (n_1 + a_1 x + b_1 y + c_1 z \ldots)^2 + \ldots)}$$

$$= e^{-2h^2 \Omega}$$

$$\text{wo } \Omega = F(x, y, z).$$

Damit Σ ein Minimum sei, so muss

$$1) \frac{d\Omega}{dx} = o, \quad 2) \frac{d\Omega}{dy} = o, \quad 3) \frac{d\Omega}{dz} = o,$$

$$\begin{aligned}
\text{also: } 1) \; 0 = & (n + ax + by + cz)\, a \\
& + (n_1 + a_1 x + b_1 y + c_1 z)\, a_1 \\
& + (n_{11} + a_{11} x + b_{11} y + c_{11} z)\, a_{11} \\
2) \; 0 = & (n + ax + by + cz)\, b \\
& + (n_1 + a_1 x + b_1 y + c_1 z)\, b_1 \\
& + (n_{11} + a_{11} x + b_{11} y + c_{11} z)\, b_{11} \\
3) \; 0 = & (n + ax + by + cz)\, c \\
& + (n_1 + a_1 x + b_1 y + c_1 z)\, c_1 \\
& + (n_{11} + a_{11} x + b_{11} y + c_{11} z)\, c_{11}
\end{aligned}$$

Zur kürzeren Bezeichnung wollen wir einführen:

$$\begin{aligned}
an + a_1 n_1 + a_{11} n_{11} &= (an) \\
aa + a_1 a_1 + a_{11} a_{11} &= (aa) \\
ab + a_1 b_1 + a_{11} b_{11} &= (ab) \\
\vdots \qquad & \quad \vdots
\end{aligned}$$

dadurch werden die letzten 3 Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
1) \; 0 &= (an) + (aa)\, x + (ab)\, y + (ac)\, z \\
2) \; 0 &= (bn) + (ab)\, x + (bb)\, y + (bc)\, z \\
3) \; 0 &= (cn) + (ac)\, x + (bc)\, y + (cc)\, z
\end{aligned}\right\} (A).$$

Da die Coefficienten wiederkehren, so erlaubt man sich eine Abkürzung:

$$\begin{aligned}
1) \; -an &= \underline{(aa)\, x} + (ab)\, y + (ac)\, z \\
2) \; -bn &= \qquad\qquad + \underline{(bb)\, y} + (bc)\, z \\
3) \; -cn &= \qquad\qquad\qquad\qquad + \underline{(cc)\, z}
\end{aligned}$$

die unterstrichenen Glieder nennt man die quadratischen.

Aus dem vorstehenden gefolgert, lässt sich nunmehr nach der Gauss'schen Eliminations-Methode das auf der folgenden Seite abgedruckte Rechnungs-Schema bilden.

$(an) =$	$(aa)_x$	$(ab)_y$	$(ac)_z$	$(bn) =$	$(bb)_y$	$(bc)_z$	$(cn) =$	$(cc)_z$
$\log (an)$ $\log \frac{(an)}{(aa)}$	$\log (aa)$	$\log (ab)$ $\log \frac{(ab)}{(aa)}$	$\log (ac)$ $\log \frac{(ac)}{(aa)}$	$(an)\frac{(ab)}{aa}$	$(ab)\frac{(ab)}{aa}$	$(ab)\frac{(ac)}{aa}$	$(an)\frac{(ac)}{aa}$	$(ac)\frac{(ac)}{aa}$
				sämmtlich subtrahirt.				
$an = (aa)_x + (ab)_y + (ac)_z$ $\frac{an}{aa}$ $-\frac{(ab)}{(aa)}y$ $-\frac{(ac)}{(aa)}z$		$\log y$ $\log \frac{(ab)}{(aa)}y$	$\log z$ $\log \frac{(ac)}{(aa)}z$	$(bn)_1$ $\log (bn)_1$ $\log \frac{(bn)_1}{(bb)_1}$	$(bb)_1$ $\log (bb)_1$	$(bc)_1$ $\log (bc)_1$ $\log \frac{(bc)_1}{(bb)_1}$	$(cn)_1$ $(bn)_1 \frac{(bc)_1}{(bb)_1}$	$(cc)_1$ $(bc)_1 \frac{(bc)_1}{(bb)_1}$
$= x =$							wieder subtrahirt.	
				$(bn)_1 = (bb)_{1y} + (bc)_{1z}$ $\frac{(bn)}{(bb)_1}$ $\frac{(bc)_1}{(bb)_1}z$		$\log z$ $\log \frac{(bc)_{1z}}{(bb)_1}$	$(cn)_2$ die letzte Gleichung wird heissen: $(cn)_2 =$ dazu $\log (cn)_2 =$	$(cc)_2$ $(cc)_2 \cdot z$ $\log (cc)_2$
				$= y =$			$\log \frac{(cn)_2}{(cc)_2} =$ $= z =$	$\log z$

hat das System m Unbekannten, so würde der letzte Coefficient die Form haben:

$$(kk)_{m-1}$$

§. 7.

Beispiel zur Methode. Pendelbeobachtungen vom Aequator bis zum Pol. Die Länge des Pendels: $L = x + y \sin^2\psi$, wo ψ die geographische Breite. Für $\psi = 0$, ist die Länge des Pendels am Aequator also $L = x$
Für $\psi = 90^\circ$, „ „ „ „ am Pol „ $L = x + y$

Es sind dazu 13 Beobachtungen:

			(engl. Zolle).	
1)	St. Thomas . $\psi_1 = \quad 0^\circ - 24' - 41''$	$L_1 = 39{,}02074$	$\sin^2\psi_1 = 0{,}00005$	1) St. Thomas.
2)	Maranhan . . $\psi_2 = - \; 2^\circ - 31' - 43''$	$L_2 = 39{,}01214$	$\sin^2\psi_2 = 0{,}00195$	2) Maranhan.
3)	Ascension . . $\psi_3 = - \; 7 - 55 - 48$	$L_3 = 39{,}02410$	$\sin^2\psi_3 = 0{,}01903$	3) Ascension.
4)	Sierra leona . $\psi_4 = + \; 8 - 29 - 28$	$L_4 = 39{,}01997$	$\sin^2\psi_4 = 0{,}02180$	4) Sierra leona.
5)	Trinidad . . . $\psi_5 = + 10 - 38 - 56$	$L_5 = 39{,}01884$	$\sin^2\psi_5 = 0{,}03415$	5) Trinidad.
6)	Bahia . . . . $\psi_6 = - 12 - 59 - 21$	$L_6 = 39{,}02425$	$\sin^2\psi_6 = 0{,}05052$	6) Bahia.
7)	Jamaica . . . $\psi_7 = + 17 - 56 - 7$	$L_7 = 39{,}03510$	$\sin^2\psi_7 = 0{,}09483$	7) Jamaica.
8)	New-York . . $\psi_8 = + 40 - 42 - 43$	$L_8 = 39{,}10168$	$\sin^2\psi_8 = 0{,}42544$	8) New-York.
9)	London . . . $\psi_9 = + 51 - 31 - 8$	$L_9 = 39{,}13929$	$\sin^2\psi_9 = 0{,}61280$	9) London
10)	Drontheim . . $\psi_{10} = + 63 - 25 - 54$	$L_{10} = 39{,}17456$	$\sin^2\psi_{10} = 0{,}79995$	10) Drontheim.
11)	Hammerforst . $\psi_{11} = + 70 - 40 - 5$	$L_{11} = 39{,}19519$	$\sin^2\psi_{11} = 0{,}89041$	11) Hammerforst.
12)	Grönland . . $\psi_{12} = + 74 - 32 - 19$	$L_{12} = 39{,}20335$	$\sin^2\psi_{12} = 0{,}92893$	12) Grönland.
13)	Spitzbergen . $\psi_{13} = + 79 - 49 - 58$	$L_{13} = 39{,}21469$	$\sin^2\psi_{13} = 0{,}96884$	13) Spitzbergen.

Zunächst Berechnung des Näherungswerthes.

$$x_0 = 39{,}0^{\text{(engl. Zoll)}} \quad y_0 = 0{,}2$$

$L = \underbrace{39{,}0 + 0{,}2 \sin^2\psi}_{V} + x + y \sin^2\psi$, wo nun noch x und y nur die Ueberschüsse über die angenommenen Grössen x_0 und y_0 sind.

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \underbrace{V - L}_{n} + x + y \sin^2\psi \\ (1)\; 0 = \quad n \quad + x + y \sin^2\psi \end{array}\right\} \text{nach No. 1 des §. 4.}$$

$$(2)\; v = \quad n \quad + x\,a + y \sin^2\psi \text{ nach No. 2 des §. 4.}$$

Aufstellung der Gleichungen.

				$0 = n + ax + by$
1)	St. Thomas	$V_1 = 39{,}0 + 0{,}00001.$	$V_1 - L_1 = -0{,}02073.$	$-V_1 = -0{,}02073 + x + y\,0{,}00005.$
2)	Maranhan	$V_2 = 39{,}0 + 0{,}00039.$	$V_2 - L_2 = -0{,}01175.$	$-V_2 = -0{,}01175 + x + y\,0{,}00195.$
3)	Ascension	$V_3 = 39{,}0 + 0{,}00381.$	$V_3 - L_3 = -0{,}02029.$	$-V_3 = -0{,}02029 + x + y\,0{,}01903.$
4)	Sierra leona	$V_4 = 39{,}0 + 0{,}00436.$	$V_4 - L_4 = -0{,}01561.$	$-V_4 = -0{,}01561 + x + y\,0{,}02180.$
5)	Trinidad	$V_5 = 39{,}0 + 0{,}00683.$	$V_5 - L_5 = -0{,}01201.$	$-V_5 = -0{,}01201 + x + y\,0{,}03415.$
6)	Bahia	$V_6 = 39{,}0 + 0{,}01010.$	$V_6 - L_6 = -0{,}01415.$	$-V_6 = -0{,}01415 + x + y\,0{,}05052.$
7)	Jamaica	$V_7 = 39{,}0 + 0{,}01897.$	$V_7 - L_7 = -0{,}01613.$	$-V_7 = -0{,}01613 + x + y\,0{,}09483.$
8)	New-York	$V_8 = 39{,}0 + 0{,}08509.$	$V_8 - L_8 = -0{,}01659.$	$-V_8 = -0{,}01659 + x + y\,0{,}42544.$
9)	London	$V_9 = 39{,}0 + 0{,}12256.$	$V_9 - L_9 = -0{,}01673.$	$-V_9 = -0{,}01673 + x + y\,0{,}61280.$
10)	Drontheim	$V_{10} = 39{,}0 + 0{,}15999.$	$V_{10} - L_{10} = -0{,}01457.$	$-V_{10} = -0{,}01457 + x + y\,0{,}79995.$
11)	Hammerforst	$V_{11} = 39{,}0 + 0{,}17808.$	$V_{11} - L_{11} = -0{,}01711.$	$-V_{11} = -0{,}01711 + x + y\,0{,}89041.$
12)	Grönland	$V_{12} = 39{,}0 + 0{,}18579.$	$V_{12} - L_{12} = -0{,}01756.$	$-V_{12} = -0{,}01756 + x + y\,0{,}92823.$
13)	Spitzbergen	$V_{13} = 39{,}0 + 0{,}19377.$	$V_{13} - L_{13} = -0{,}02092.$	$-V_{13} = -0{,}02092 + x + y\,0{,}96884.$

Da die Coefficienten a sämmtlich $= 1$ sind, so folgt $(an) = (n) = -0{,}21415$

$$\left.\begin{matrix} -(an) = (aa)\,x + (ab)\,y \\ -(bn) = (ab)\,x + (bb)\,y \end{matrix}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{matrix} (aa) = (1) = 13 \\ (ab) = (b) = 4{,}84870 \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} bn = -0{,}00005 - 0{,}02073 \\ = -0{,}00195 - 0{,}01175 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \end{matrix}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (bn) = -0{,}08419$$

$$(bb) = \left.\begin{matrix} (0{,}00005)^2 \\ +\,(0{,}00195)^2 \\ +\,\ldots\ldots \end{matrix}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (bb) = \quad = 3{,}80439.$$

$$\begin{array}{l} \quad an \\ +0{,}21415 = 13\,x + 4{,}84870\,y \\ \quad bn \\ +0{,}08419 = \qquad + 3{,}80439\,y \end{array} \left\} \begin{array}{l} x = +0{,}01567 \text{ engl. Zoll.} \\ \\ y = +0{,}00216. \end{array}\right.$$

Länge des Pendels am Aequator:

$$L_0 = x_0 + x = 39{,}01567.$$

Länge des Pendels am Pol:

$$L_{90} = x_0 + x + y_0 + y = 39{,}21783.$$

§. 8.

Bedeutung der Constanten h; mittlerer Fehler.

Ist nach dem Vorigen aus einer grossen Anzahl n von Beobachtungen einer Grösse M der wahrscheinlichste Werth der in seinem analytischen Ausdrucke vorkommenden Constanten ermittelt, so lassen sich aus diesem wiederum die wahrscheinlichsten Werthe der gemessenen Grösse M bestimmen. Diese werden etwas von der gemessenen Grösse abweichen; durch Subtraction der gerechneten Werthe von den gemessenen werden sich die Fehler der Beobachtungen ergeben. Im vorigen Paragraphen sind (13 L) gemessen; jene (13 L) lassen sich aber aus der Formel am Ende des § wieder berechnen, wenn man für ψ seinen Werth setzt; die gemessenen L — den gerechneten (L) sind die Fehler:

$$\begin{array}{c} L - (L) = v \\ L_1 - (L_1) = v_1 \\ L_{11} - (L_{11}) = v_{11} \\ \vdots \qquad \vdots \end{array}$$

Nennt man diese Fehler $v, v_1, v_{11} \ldots$, so kann man einen Modulus für die Güte der Beobachtungen bilden, wenn man die Summe der Quadraten der Fehler Σv^2 bildet, die nach der Theorie ja die kleinste mögliche Summe ist, und diese Summe durch n dividirt; man erhält hierdurch das mittlere Fehler-Quadrat $\frac{(vv)}{n}$ das wir mit $\varepsilon\varepsilon$ bezeichnen wollen.

$$\varepsilon\varepsilon = \frac{(v^2)}{n}, \left[\text{wo } (v^2) \text{ die Summe aller } v^2 \text{ bedeutet.}\right]$$

Wenn dieses mittlere Fehler-Quadrat einen Maassstab für die Beobachtungen bilden soll, so muss es auch einen solchen bilden für die Wiederholung der Beobachtungen mit denselben Mitteln und derselben Sorgfalt, d. h. man muss bei einer Wiederholung ein gleiches mittleres Fehler-Quadrat riskiren. Für eine solche Wiederholung war aber die Curve der Fehlervertheilung, deren Ordinate

$$\varphi(v) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 . n^2}$$

auch ein Maassstab; sie sollte ja auch angeben, wie gross die Wahrscheinlichkeit sei, dass ein Fehler innerhalb gewisser Abstände von der Mittellinie eintreffen könne.

$d\,v\,n\,.\,\varphi(v)\,.\,v^2$ ist also der Fehler in einem unendlich kleinen Rechteck der Curve.

$$n\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(v)\,v^2\cdot d\,v$$

daher die Summe aller Fehler in der ganzen Curve, und

$$\frac{n\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(v)\cdot v^2\cdot d\,v}{n}$$

daher der mittlere Fehler.

Entwicklung des Integrals:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(v)\,v^2\cdot d\,v;\ \text{wo}\ \varphi(v)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-h^2\,.\,v^2};$$

$$=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-h^2\,.\,v^2}\cdot 2\,v^2\cdot h^2\cdot d\,v$$

$$=\frac{1}{2\,h\sqrt{\pi}}\left\{-\left[e^{-h^2\,.\,v^2}\cdot v\right]_{-\infty}^{+\infty}+\frac{1}{h}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-h^2\,.\,v^2}\cdot d\,v\right\}$$

der Ausdruck

$$\left[e^{-h^2\,.\,v^2}\cdot v\right]_{-\infty}^{+\infty}\ \text{wird}=0\ \text{u. das}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdot e^{-h^2\,.\,v^2}\cdot d\,v\ \text{wird}=\sqrt{\pi}.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(v)\,v^2\cdot d\,v=\frac{1}{2\,.\,h^2}$$

wir bekommen also zur Bestimmung der Constante h die Gleichung

$$\frac{1}{2\,h}2=\varepsilon\varepsilon=\frac{(v\,.\,v)}{n}\ \text{oder}\ h=\frac{1}{\varepsilon\,.\sqrt{2}}.$$

In der Wahrscheinlichkeits-Curve hat demnach h die Bedeutung, dass bei besseren Beobachtungen der Ausdruck

$\frac{h \cdot e^{-h^2 \cdot v^2}}{\sqrt{\pi}}$ einen grossen Werth,

bei schlechteren Beobachtungen einen kleinen Werth hat.

Ueberschreitet $\frac{h}{\sqrt{\pi}}$, die Ordinate, ein gewisses Maass, so werden die Wahrscheinlichkeiten gleichmässiger.

§. 9.

Das Maass der Präcision.

Ausser dem Modulus: die Beobachtungen, nach dem Quadrat des mittleren Fehlers zu beurtheilen, kann man sie auch nach dem wahrscheinlichen Fehler beurtheilen.

Der wahrscheinliche Fehler eignet sich vorzugsweise zur Einheit des Maasses, wonach die Fehler derselben Gattung gemessen werden. Nimmt man den Flächen-Inhalt der Curve, deren Abcissen v die Fehler, und deren Ordinaten $\varphi(v)$ die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten darstellen, gleich 1 an, so wird offenbar diejenige Ordinate den besten Maassstab für die Genauigkeit der Beobachtungen abgeben, für welche das Integral $\int \varphi(v)\, dv$ den Werth $\frac{1}{2}$ bekommt; oder was dasselbe sagt, welche eine hinlänglich grosse Anzahl von Fehlern, wenn man sie sich ohne Rücksicht auf ihre Zeichen, nach ihrer Grösse geordnet denkt, in 2 gleiche Theile trennt, von denen jeder eine gleiche Anzahl von Fehlern enthält. Dieser Werth von (v) zeigt also, wie weit man die Grenzen von 0 ab ausdehnen muss, damit es ebenso wahrscheinlich ist, dass der bei einer Beobachtung stattfindende Fehler innerhalb dieser Grenzen liege, als ausserhalb. Führt man ausserdem als Längenmaass für die Abcissen den wahrscheinlichen Fehler ein, so lassen sich die Ordinaten und die durch letztere begrenzte Flächen in bestimmte Zahlenwerthe ausdrücken. Wir haben gesehen, dass den Fehler zwischen $+v$ und $-v$ zu begehen das Rechteck zwischen je zwei Ordinaten ist. Man kann nun fragen, welches ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$, oder welches ist die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers in den Grenzen $+w-w$, oder in den Grenzen $+w-\infty$ und $-w+\infty$; d. h.

$$W(\text{Fehler } +w-w) = \int_{-w}^{+w} \varphi(v) \cdot dv = 2\int_{0}^{w} \varphi(v)\, dv = \frac{1}{2}$$

$$W(\text{Fehler } +w-\infty) = 2\int_{w}^{\infty} \varphi(v) \cdot dv = \frac{1}{2} \text{ (denn } \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(v)\, dv = 1)$$

Entwicklung des Integrals:

$$2\int_0^w \varphi(v)\,dv = \frac{1}{2} = \frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^w e^{-h^2 v^2} \cdot dv$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^w \left\{1 - \frac{h^2 . v^2}{1} + \frac{h^4 . v^4}{1.2} - \frac{h^6 . v^6}{1.2.3} + \cdots\right\} dv$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2h}{\sqrt{\pi}}\left\{v - \frac{h^2 . v^3}{1,3} + \frac{h^5 . v^5}{1.2.5} - \frac{h^6 . v^7}{1.2.3.7} + \cdots\right\}_0^w$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{4} = h\,w - \frac{h^3 . w^3}{1.3} + \frac{h^5 . w^5}{1,2.5} - \frac{h^7 . w^7}{1.2.3,7} + \cdots,$$

$$h . w = 0{,}476936;\ w = \frac{0{,}476936}{h}$$

w ist die Ordinate desjenigen Punktes der Curve, wo die Wahrscheinlichkeit, darüber hinauszugehen, eben so gross ist, als darunter zu bleiben. Gauss hat aus diesem Grunde — h das Maass der Präcision — genannt.

Das bestimmte Interal

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^w e^{-h^2 . v^2} \cdot dv = \frac{1}{2}$$

welches die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, dass der Beobachtungsfehler, absolut genommen, den Werth von w nicht überschreite, kann in endliche Form nicht dargestellt werden, und man hat deshalb Näherungs-Methoden zu seiner Werthbestimmung anzuwenden. Da es übrigens bei Beobachtungen meistens von besonderem Werthe ist, zu erfahren, mit welcher Wahrscheinlichkeit man erwarten darf, dass ein Beobachtungsfehler ein gewisses Vielfaches des wahrscheinlichsten Fehlers nicht überschreiten wird, so hat man Tabellen für die Grösse $h . v = t$ (vid. §. 5) nach Theilen von $h w = 0{,}4769360$ geordnet, aufgestellt, welche wir auf Seite 46 folgen lassen.

Jene Tabelle zeigt, wie schnell bei grossen Werthen von t die Anzahl der Fehler innerhalb gleicher Intervalle dieser Werthe abnimmt. Man darf z. B. bei Beobachtungen jeder Art erwarten, dass von je 1000 Fehler 54 Fehler absolut genommen unter 0,1 des wahrscheinlichen Fehlers betragen werden, ebenso 107 Fehler unter 0,2 des wahrscheinlichen Fehlers etc., oder nach dem Sprachgebrauch der Wahrscheinlichkeiten ausgedrückt: „man kann 54 gegen 946 wetten, dass ein zu erwartender Beobachtungsfehler weniger als 0,1 des wahrscheinlichen

Fehlers betragen werde; ebenso 107 gegen 893, dass er weniger als 0,2 betragen werde.

In gleicher Weise lassen sich die Einsätze berechnen, die man verwetten darf, darauf, dass der einzelne Beobachtungsfehler gewisse Vielfache von w nicht übersteigen wird. Nämlich:

$2\frac{3}{4}$	gegen	1	für	$\frac{1}{2}$ w.		1	gegen	415	für	$4\frac{1}{2}$	w.
1	„	1	„	1 w.		1	„	1341	„	5	w.
1	„	$2\frac{1}{4}$	„	$1\frac{1}{2}$ w.		1	„	4807	„	$5\frac{1}{2}$	w.
1	„	$4\frac{1}{2}$	„	2 w.		1	„	19230	„	6	w.
1	„	10	„	$2\frac{1}{2}$ w.		1	„	83330	„	$6\frac{1}{2}$	w.
1	„	22	„	3 w.		1	„	333330	„	7	w.
1	„	54	„	$3\frac{1}{2}$ w.		1	„	1000000	„	$7\frac{1}{2}$	w.
1	„	142	„	4 w.							

Ausserdem zeigt die Tabelle, in welchem Verhältniss die Fehler sich nach ihrer Grösse vertheilen. Hierdurch wird Gelegenheit geboten, die Richtigkeit der Fehler und der ganzen vorgetragenen Theorie der Fehler gegenüber der Erfahrung zu prüfen, welches wir im III. Abschnitt §. 3 versuchen werden.

III. Abschnitt.

Anwendung der Methode auf physikalische Beobachtungen.

§. 1.

Im Falle das physikalische Gesetz bekannt.

Bei der Herleitung der Theorie der kleinsten Quadrate haben wir bereits vermöge des Pendel-Beispiels gezeigt, wie der Gang einer Ausgleichungsrechnung für solche und ähnliche Beobachtungen zu wählen ist. In dem gedachten Falle war das physikalische Gesetz für die Länge des Secunden-Pendels unter verschiedenen Breiten-Graden bekannt und ausgedrückt durch die Gleichung:

$$L = x + y \sin^2\psi,$$

wo x und y zwei unbekannte Constanten, deren wahrscheinlicher Werth durch Beobachtungen zu ermitteln und ψ die zu jeder Beobachtung zugehörige Breite war. Vermöge der Methode der kleinsten Quadrate wurde dann die wahre Länge des Secunden-Pendels am Pol und Aequator ermittelt und auf diese Weise die wahre Länge für jede andre Breite zu bestimmen möglich.

Wir wollen uns nunmehr erlauben, zur weiteren Bestätigung der Methode ein Beispiel nach einem anderen bekannten Gesetze durchzurechnen und wählen dazu:

„das Gesetz der Ausdehnung von Flüssigkeiten durch Wärme."

Bekanntlich nimmt das Volumen der meisten Körper, besonders der Flüssigkeiten, vermöge ihrer Ausdehnung, mit steigender Wärme zu. Wenn nun auch die Zunahme des Volumens nicht genau pro-

portional der Zunahme der Wärme ist, so bleibt sie doch von ihr abhängig, und man kann V ausdrücken durch $\varphi(c)$ in Form der linearen Gleichung $V = 1 + xt + yt^2$. Demnach würde es Sache der Rechnung sein, die unbekannten Constanten $x.y$, welche sich auf die Volumina bei beobachtetem Temperaturgrade beziehen, zu bestimmen.

Beispiel. Nach Regnault's Lehrbuch der Chemie soll das Volumen des Quecksilbers sein, das Volumen bei $0^0 = 1$ gesetzt:

bei $50^0 = 1{,}009013$.	bei $250^0 = 1{,}046329$.
„ $100^0 = 1{,}018153$.	„ $300^0 = 1{,}055973$.
„ $150^0 = 1{,}027419$.	„ $350^0 = 1{,}065743$.
„ $200^0 = 1{,}036811$.	„ $400^0 = 1{,}075639$.

Wir hätten also nach §. 6 Abschnitt II. die Formeln A. die 2 Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ 0 = an + (aa)x + (ab)y \\ (2)\ 0 = bn + (ab)x + (bb)y\end{array}\right\} \text{in obig. Falle.} \left\{\begin{array}{l}(V-1)\,t = t^2x + t^3y\ (1) \\ (V-1)\,t^2 = t^3x + t^4y\ (2)\end{array}\right.$$

indem $a = t$ u. $b = t^2$ ist.

Zufolge der vorstehenden Beobachtungen bekommen wir die 8 Gleichungen:

$$1{,}009013 = 1 + 50x + 2500y$$

und indem wir 1 auf jeder Seite subtrahiren:

$$\begin{aligned}
0{,}009013 &= 50x + 2500y. \\
0{,}018153 &= 100x + 10000y. \\
0{,}027419 &= 150x + 22500y. \\
0{,}036811 &= 200x + 40000y. \\
0{,}046329 &= 250x + 62500y. \\
0{,}055973 &= 300x + 90000y. \\
0{,}065743 &= 350x + 122500y. \\
0{,}075639 &= 400x + 160000y.
\end{aligned}$$

Zum Zwecke der Summirung ordne man die Coefficienten folgendermassen:

(an) tn	(bn) t^2n	$(a.a)$ t^2	$(a.b)$ t^3	(b^2) t^4
0,450650	22,532500	2500	125000	6250000
1,815300	181,530000	10000	1000000	100000000
4,112850	616,927500	22500	3375000	506250000
7,362200	1472,440000	40000	8000000	1600000000
11,582250	2895,562500	62500	15625000	3906250000
16,791900	5037,570000	90000	27000000	8100000000
23,010050	8053,517500	122500	42875000	15006250000
30,255600	12092,240000	160000	64000000	25600000000
95,380800 $= tn$	30372,320000 $= t^2n$	510000 $= t^2$	162000000 $= t^3$	54825000000 $= t^4$

Man erhält hiermit die beiden Normalgleichungen:

$$95{,}380800 = 510000\,p + 162000000\,q.$$
$$30372{,}320000 = 162000000\,p + 54825000000\,q.$$

$$x = 0{,}00017900950.$$
$$y = 0{,}00000002528.$$

$$V = 0{,}00017900950\,t + 0{,}00000002528\,t^2 + 1.$$

In Worten ausgedrückt: „das Volumen des Quecksilbers bei einer gewissen Temperatur t (das Volumen bei 0 Grad = 1 gesetzt) ist gleich dem obigen Ausdruck. Vermöge der Coefficienten x u. y ist man also im Stande eine Scala der Ausdehnung für jeden Temperaturgrad von 0° ab beliebig weiter zu berechnen. Sind die Coefficienten richtig, so muss jede der obigen 8 Gleichungen, wenn man sie in dieselben einführt, gleich Null werden; was in der That bis zur 6. Decimalstelle richtig eintrifft, drüber hinaus ergiebt sich der mittlere Fehler.

§. 2.

Im Falle das physikalische Gesetz gefunden werden soll.

Bei dem oben durchgerechneten Beispiel sowohl wie bei dem früheren im II. Abschnitt zur Berechnung der mittleren Pendellänge war das physik. Gesetz bereits bekannt. So liegt die Aufgabe aber nicht immer. Häufig kommt es vor, dass man eine grosse Anzahl gleich guter Beobachtungen, mit besonderer Sorgfalt angestellt, zur Verfügung hat, aus denen das Gesetz des physik. Vorganges gefunden werden soll.

Um schliesslich noch das Verfahren in solchen Fällen zu veranschaulichen, mag es gestattet sein, hier ein Beispiel anzuführen, welches Hagen in seinem: „Grundzüge der Wahrscheinlichkeits-Rechnung, Berlin 1867 vorgeführt. Man findet dasselbe im V. Abschnitt §. 34 des genannten Werkes ausführlich durchgerechnet, während wir nur den Gang der Rechnung, die Bedingungsgleichen und fertigen Resultate zu geben beabsichtigen.

Die Aufgabe lautet: Das Gesetz zu finden, nach welchem der Ausfluss trockenen Sandes durch Oeffnungen in der Seitenwand eines Gefässes stattfindet.

Zur Auflösung ist erfahrungsmässig bekannt, dass die Ausflussmengen des Sandes von der Druckhöhe, d. h. der Höhe der Sandfüllung des Gefässes gänzlich unabhängig sind. Diese Erscheinung erklärt sich aus der starken Reibung, welche die einzelnen Sandkörner untereinander ausüben.

Demnach könnte das Gesetz über den Ausfluss tropfbarer Flüssigkeiten, nach welchem die Ausflussmenge eine Function der Druckhöhe

ist, keine Anwendung finden, und es mussten Versuche angestellt werden, welche mit reinem, möglichst gleichförmigen, völlig trockenem Quarzsande von 0,021″ Durchmesser geschah. Die Radien der Ausflussöffnungen mögen mit $^1/_4\ \varrho$, die in jeder Secunde ausfliessenden Sandmengen mit m bezeichnet werden. Man fand:

1)	$\varrho = 0{,}05487$ Rh. Zoll.	$m = 0{,}009117$ cub. Zoll.
2)	$\varrho = 0{,}08052$ „	$m = 0{,}029854$ „
3)	$\varrho = 0{,}09868$ „	$m = 0{,}053986$ „
4)	$\varrho = 0{,}12017$ „	$m = 0{,}095324$ „
5)	$\varrho = 0{,}16784$ „	$m = 0{,}234628$ „

Um die Bezeichnungen zwischen ϱ und m zu finden, wurde zunächst die Gleichung benutzt:

$$\text{I.}\quad m = x\varrho + y\varrho^2 + z\varrho^3,$$

da man annehmen kann, dass m sich durch verschiedene Potenzen von ϱ ausdrücken lässt. Ein constantes Glied ist offenbar entbehrlich, da $m = 0$ wird, wenn $\varrho = 0$ ist.

Die 3 Bedingungs-Gleichungen werden also sein: §. 6 Abschn. II.

$$1)\quad m\varrho = x\varrho^2 + y\varrho^3 + z\varrho^4$$
$$2)\quad m\varrho^2 = x\varrho^3 + y\varrho^4 + z\varrho^5$$
$$3)\quad m\varrho^3 = x\varrho^4 + y\varrho^5 + z\varrho^6$$

und man findet aus den vorstehenden Gleichungen:

$m\varrho = 0{,}059065.$	$\varrho^2 = 0{,}061841.$	$\varrho^5 = 0{,}000171481.$
$m\varrho^2 = 0{,}0087325.$	$\varrho^3 = 0{,}0081113.$	$\varrho^6 = 0{,}0000265875.$
$m\varrho^3 = 0{,}00134369.$	$\varrho^4 = 0{,}00114796.$	

woraus folgt:

$$x = -0{,}186857;\ y = +4{,}72591;\ z = 28{,}1257.$$

Diese Werthe in die Gleichung I. eingesetzt:

$$\text{I.}\quad m = -0{,}1868\,\varrho + 4{,}7259\,\varrho^2 + 28{,}1257\,\varrho^3,$$

und hieraus die 5 Werthe von m berechnet und verglichen:

beobachtet	berechnet	Fehler	Quadrat der Fehler
$m = 0{,}009117.$	$m = 0{,}0141.$	$+ 0{,}0049.$	0,00002401.
$m = 0{,}029854.$	$m = 0{,}0042.$	$- 0{,}0042.$	0,00001764.
$m = 0{,}053986.$	$m = 0{,}0477.$	$- 0{,}0062.$	0,00003844.
$m = 0{,}095324.$	$m = 0.1025.$	$+ 0{,}0072.$	0,00005184.
$m = 0{,}234628.$	$m = 0{,}2334.$	$- 0{,}0012.$	0,00000144.
		Summa	0,00013337.

Die versuchte Gleichung I. befriedigt indessen nicht, weil die Ausflussmenge m weder der 2. noch der 3. Potenz von ϱ proportional ist, auch das negative Zeichen des 1. Gliedes ist unerklärlich. Nichtsdestoweniger zeigt die Rechnung, dass m einer gewissen Potenz von ϱ proportional ist, deren Exponent zwischen 2 und 3 liegt.

Es musste nun zunächst diese unbekannte Potenz von ϱ gesucht werden, und dazu wurde die Gleichung benutzt:

$$\text{II.}\quad m = x\,\varrho^{\,s+\sigma}$$

geht man in dieser Gleichung von den Zahlen zu den Logarithmen über, wodurch sich die Rechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate bequemer behandeln lässt, nachdem man zuvor $\varrho^{\,s+\sigma}$ nach dem Taylor'schen Lehrsatz entwickelt hat:

$$\varrho^{\,s+\sigma} = \varrho^s + \frac{\sigma}{1} \cdot \frac{d\,\varrho^s}{d\,s} + \frac{\sigma^2}{1\,.\,2} \cdot \frac{d^2\,\varrho^s}{d\,s^2} + \cdots$$

und vernachlässigt die folgenden Glieder, was zulässig, wenn σ gegen s sehr klein angenommen wird, so erhält man:

$$\varrho^{\,s+\sigma} = \varrho^s + \sigma\varrho^s\,.\,\text{log nat.}\ \varrho$$

$$\text{und II.}\ m = x\,.\,\varrho^s + x\,.\,\sigma\varrho^s\,.\,\text{log nat}\ \varrho.$$

Die Unbekannten sind nunmehr x und $x\,\sigma$, die Bekannten m, ϱ^s, da sich aus der vorherigen Berechnung ersehen liess, dass der Exponent von ϱ zwischen der 2. und 3. Potenz liegen musste, man also die Rechnung mit $s = 2{,}9$ versuchen kann, und ebenso ist bekannt ϱ^s log nat ϱ.

Uebersehen darf bei der Rechnung nicht werden, dass die Briggischen Logarithmen in natürliche umzuwandeln sind.

$$\text{II.}\quad m = 30{,}478\ \varrho\ 2{,}6959$$

und die hieraus berechneten 5 Werthe von m:

beobachtet	berechnet	Fehler	Quadrat der Fehler
$m = 0{,}009117.$	$m = 0{,}0120.$	$+ 0{,}0029.$	0,00000847.
$m = 0{,}029854.$	$m = 0{,}0338.$	$+ 0{,}0040.$	0,00001624.
$m = 0{,}053986.$	$m = 0{,}0586.$	$+ 0{,}0047.$	0,00002190.
$m = 0{,}095324.$	$m = 0{,}0957.$	$+ 0{,}0045.$	0,00002061.
$m = 0{,}234628.$	$m = 0{,}2461.$	$+ 0{,}0115.$	0,00013248.
			Summa 0,00019970.

Die Summe der Fehler-Quadrate stellt sich also nur wenig höher heraus als bei Gleichung I., welche doch 3 Glieder mit ϱ enthielt; dagegen zeigt der Umstand, dass die Fehler sämmtlich positiv sind, dass man den Exponenten $5 = 2{,}9$ **zu hoch** gewählt hat. Man könnte nun in der Gleichung II. den Exponenten $s = 2{,}8$, oder $s = 2{,}7$, oder $s = 2{,}6$ versuchen.

Nach dieser Richtung hin wäre also die Untersuchung als geschlossen anzusehen, und das Resultat erzielt, dass mit einem passenden Exponenten die Gleichung II. den Anforderungen genügt.

Dagegen fällt es auf, dass sich die Fehler immer noch zu gross herausstellen, grösser als man nach der Schärfe der Beobachtungen erwarten sollte. Dazu kommt noch, dass die gesuchten Exponenten

sich sehr regelmässig vermindern, wenn sie aus je 2 neben einander liegenden Beobachtungen berechnet werden, und dass mit dem wachsenden ϱ der Exponent desselben kleiner wird. Dies führt auf die Vermuthung, dass man den Werth von ϱ um eine gewisse constante Grösse vermindern müsse, um die Gleichmässigkeit der Exponenten darzustellen. Hierzu ist auch in der That ein Grund vorhanden, denn durch die Reibung werden die Sandkörnchen in der Oeffnung selbst ein wenig aufgehalten und verengen dieselbe, dadurch entsteht eine Verminderung der Geschwindigkeit und somit auch der Ausflussmenge.

Unter letzterer Voraussetzung müsste also ϱ mit einer passenden Verminderung in die Rechnung eingeführt werden. Wir wählen hierzu den halben Durchmesser der Sandkörnchen oder 0,01, und setzen $\varrho = \varrho - 0{,}01$. Man erhält alsdann die Gleichung:

$$\text{III.} \quad m = x\,(\varrho - 0{,}01)^{s + \sigma}$$

und für s gesetzt 2,7, so ergiebt dieses nach Analogie der Gleichung II.

$$\text{III.} \quad m = x\,(\varrho - 0{,}01)^{2{,}7} + x\,\sigma\,(\varrho - 0{,}01)^{2{,}7} \,.\, \log \text{nat}\,(\varrho - 0{,}01)$$

man erhält also die beiden Bedingungsgleichungen:

$$1. \quad 0{,}0019555 = 0{,}000056268 \,.\, x - 0{,}00010805 \,.\, x\,\sigma$$
$$2. \quad 0{,}0037654 = 0{,}00010\text{[illegible]}050 \,.\, x - 0{,}00020921 \,.\, x\,\sigma$$

und hieraus $x = 23{,}398$, $\sigma = -0{,}253$.
$x\,\sigma = -5{,}9137$, $s + \sigma = 2{,}447$. nahe: 2,5.

Dieser Exponent lässt sich folgendermassen erklären. Eine geschlossen durch die Oeffnung hindurchfallende Sandmasse ist proportional dem Producte aus dem Flächeninhalt der freien Oeffnung $(\varrho - \alpha)^2 \,.\, \pi$ in die Geschwindigkeit; wo α die obige willkürlich angenommene Verminderung des Radius ausdrückt. Die Geschwindigkeit ist aber, wenn freier Fall stattfindet, der Quadratwurzel aus der Fallhöhe proportional. Hierdurch rechtfertigt sich der Ausdruck

$$\text{IV.} \quad m = x\,(\varrho - 0{,}01 + \alpha)^{2{,}5}$$

und diese nach dem binomischen Lehrsatz aufgelöst:

$$\text{IV.} \quad m = (\varrho - 0{,}01)^{2{,}5} \,.\, x + 2{,}5 \,.\, \alpha\, x\,(\varrho - 0{,}01)^{1{,}5} + \ldots$$

Die folgenden Glieder dürfen wegen der jedenfalls sehr kleinen Correction α gegenüber $\varrho - 0{,}01$ vernachlässigt werden.

Man erhält nunmehr die 2 Bedingungsgleichungen:

$$1. \quad 0{,}0028761 = 0{,}00012161 \,.\, x + 0{,}00085864 \,.\, 2{,}5\,\alpha\,x.$$
$$2. \quad 0{,}0202704 = 0{,}00085864 \,.\, x + 0{,}00640802 \,.\, 2{,}5\,\alpha\,x.$$

und hieraus

$$x = 24{,}397; \quad \alpha = 0{,}001735$$

ebenso die Gleichung IV.

$$\text{IV}^{a.}\quad m = 24{,}397\,(\varrho - 0{,}00173)^{2{,}5}$$

und daraus die Werthe von m

beobachtet	berechnet	Fehler	Fehler-Quadrat
$m = 0{,}009117.$	0,009427.	+ 0,00031.	0,000000096.
$m = 0{,}029854.$	0,029484.	+ 0,00043.	0,000000185.
$m = 0{,}053986.$	0,054386.	+ 0,00040.	0,000000160.
$m = 0{,}095324.$	0,094484.	— 0,00084.	0,000000706.
$m = 0{,}234624.$	0,234914.	+ 0,00029.	0,000000084.
		Summa	0,000001231.

Die Fehler fallen unregelmässig und die Summe ihrer Quadrate ist bedeutend geringer, als in allen früheren Rechnungen. Die Gleichung IV. schliesst sich also am besten an die zu Grunde gelegten Beobachtungen an, namentlich aber lässt sich auch der angenommene Exponent nach den bekannten Gesetzen der Mechanik erklären.

Um die wahrscheinlichen Fehler der beiden Constanten x und α zu finden, bedient man sich der Gleichung

$$\text{IV.}\quad m = (\varrho - 0{,}01)^{2{,}5} \,.\, x. + (\varrho - 0{,}01)^{1{,}5} \,.\, 2{,}5\, x\, \alpha.$$

führt hierin die fünf verschieden **beobachteten** Werthe von ϱ und ebenso die **berechneten** von x und α ein, woraus man fünf verschiedene Werthe von m erhält, sehr nahe den obigen berechneten.

Es könnte schliesslich noch gefragt werden, wie gross der wahrscheinliche Fehler des Exponenten 2,5 sei. Der Ausdruck für den Exponenten würde sein nach Gleichung IV$^{a.}$

$$s = \frac{\log m - \log 24{,}397}{\log(\varrho - 0{,}01173).}$$

Die 2 verschiedenen Werthe von m und ϱ in diese Gleichung eingeführt, ergiebt im Mittel 2,5031, und sucht man hieraus wieder die Differenzen der 5 berechneten Werthe gegen das Mittel und bildet die Quadrate dieser Differenzen, so findet man die Summe der Differenzen = 0,000118, woraus sich der wahrscheinliche Fehler der einzelnen Werthe von s gleich 0,0134 ergiebt.

Der Werth ist klein genug, um hinreichende Sicherheit in Bezug auf seine Benutzung zu bieten.

§. 3.

Vertheilung der Fehler in grösseren Beobachtungsreihen.

Wir hatten bereits im Abschnitt II. §. 9 bei Definirung des **Maasses der Präcision** der Fehler-Vertheilung Erwähnung gethan, desgleichen einer Tabelle, welche für diejenigen Fälle gültig, in denen

das Maass der Präcision „h" gegebener Beobachtungen den Werth Eins hat, also

$$h = 1,\ h\,v = t,\ d\,v = \frac{d\,t}{h},\ \text{und}$$

$$\frac{2\,h}{\sqrt{\pi}}\int_0^w e^{-h^2 v^2}\cdot d\,v = \frac{1}{2} \text{ geht über in } \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}\cdot d\,t = \frac{1}{2},$$

$$h\,w = \varrho = 0{,}476936.$$

d. h. das Maass der Präcision ausgedrückt durch einen aliquoten Theil des wahrscheinlichen Fehlers.

$\frac{t}{\varrho}$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}\cdot d\,t.$		$\frac{t}{\varrho}$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}\cdot d\,t.$	
0,0	0,000	Differ.	2,5	0,908	Differ.
0,1	0,054	54	2,6	0,921	13
0,2	0,107	53	2,7	0,931	10
0,3	0,160	53	2,8	0,941	10
0,4	0,213	53	2,9	0,950	9
0,5	0,264	51	3,0	0,957	7
0,6	0,314	50	3,1	0,963	6
0,7	0,363	49	3,2	0,969	6
0,8	0,411	48	3,3	0,974	5
0,9	0,456	45	3,4	0,978	4
1,0	0,500	44	3,5	0,982	4
1,1	0,542	42	3,6	0,985	3
1,2	0,582	40	3,7	0,987	2
1,3	0,619	37	3,8	0,990	3
1,4	0,655	36	3,9	0,991	1
1,5	0,688	33	4,0	0,993	2
1,6	0,719	31	4,1	0,994	1
1,7	0,748	29	4,2	0,995	1
1,8	0,775	27	4,3	0,996	1
1,9	0,800	25	4,4	0,997	1
2,0	0,823	23	4,5	0,998	1
2,1	0,843	20	4,6	0,998	0
2,2	0,862	19	4,7	0,998	0
2,3	0,879	17	4,8	0,999	1
2,4	0,895	16	4,9	0,999	0
2,5	0,908	13	5,0	0,999	0

Diese Tabelle ist übrigens nunmehr dadurch, dass das Maass der Präcision durch einen aliquoten Theil des wahrscheinlichen

Fehlers derselben Beobachtung ausgedrückt, gänzlich unabhängig von der Güte der Beobachtungen, und man vermag aus ihr ganz allgemein die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass der Beobachtungsfehler beliebiger Beobachtungen absolut genommen einen gewissen Werth nicht überschreite.

Beispiel. Hat man z. B. 110 Beobachtungen, und vermöge des arithmetischen Mittels gefunden, dass der Fehler in jeder Beobachtung 8,06 oder sehr nahe 8 betrage und die Abweichungen von dieser Anzahl seien:

$$\left.\begin{array}{rl} 26 \text{ mal} & = 0 \\ 43 \text{ -} & = 1 \\ 24 \text{ -} & = 2 \\ 11 \text{ -} & = 3 \\ 4 \text{ -} & = 4 \\ 0 \text{ -} & = 5 \\ 2 \text{ -} & = 6 \end{array}\right\}$$

Die Summe der Quadrate der übriggebliebenen Fehler $\Sigma(v^2) = 374$, also $\varepsilon\varepsilon = \frac{(v^2)}{n}$ mittlerer Fehlerquadrat $= \frac{374}{110} = 3{,}40$, und $\varepsilon = 1{,}844$.

Nach §. 8 Abschnitt II. ist $h = \frac{1}{\varepsilon \cdot \sqrt{2}}$, nach §. 9, $w = \frac{0{,}476936}{h}$

folglich $w = 0{,}476936 \cdot \sqrt{2} \cdot \varepsilon$, $0{,}476936 \cdot \sqrt{2} = 0{,}674486$.

$$w = 0{,}674486 \cdot \varepsilon = 1{,}244.$$

Da die vorstehende Tabelle für den wahrscheinlichen Fehler $w = 1$ berechnet ist, so muss man die Grenzwerthe der Abcisse x hier $\frac{t}{\varrho}$ der Wahrscheinlichkeits-Curve durch 1,244 dividiren. Die Grenzwerthe der Fehler fallen bei obigem Beispiel selbstredend zwischen 2 ganzen Zahlen, also zwischen 0,5, 1,5, 2,5 u. s. f. Man findet für

$$\frac{0{,}5}{1{,}244} = 0{,}445. \quad \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} \cdot dt = 0{,}236.$$

$$\frac{1{,}5}{1{,}244} = 1{,}334. \quad \text{"} \quad \text{"} \quad = 0{,}631.$$

$$\frac{2{,}5}{1{,}244} = 2{,}223. \quad \text{"} \quad \text{"} \quad = 0{,}867.$$

$$\frac{3{,}5}{1{,}244} = 3{,}113. \quad \text{"} \quad \text{"} \quad = 0{,}964.$$

$$\frac{4{,}5}{1{,}244} = 4{,}002. \quad \text{"} \quad \text{"} \quad = 0{,}993.$$

$$\frac{5{,}5}{1{,}244} = 4{,}892. \quad \text{"} \quad \text{"} \quad = 0{,}999.$$

Der erste Werth bezeichnet die Verhältnisszahl derjenigen Fehler, die kleiner als $\frac{1}{2}$ sind, der zweite die kleiner als $1\frac{1}{2}$, also kleiner als 2 sind. Zieht man den ersten vom zweiten ab, so findet man die relative Anzahl der Fehler von der Grösse 1 und diese mit der Anzahl der Beobachtungen 110 multiplicirt ergiebt die absolute Zahl der Fehler.

Vergegenwärtigt man sich die Entstehung der Wahrscheinlichkeits-Curve und die Bedeutung des Integrals

$$n\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(v)\, dv \,.\, v^2$$

vid. §. 3 Abschnitt II, so wird man nicht länger darüber in Zweifel sein, dass jeder der vorstehenden Coefficienten mit der Anzahl der Beobachtungen multiplicirt, eines von den unendlich vielen kleinen Flächenstückchen zwischen je 2 Ordinaten, aus denen man sich die ganze Fläche der Curve zusammengesetzt denken kann, ausdrückt, mithin auch die Fehler-Quote in diesem Flächenstückchen.

Wir hatten umstehend

t	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2} . dt = 0{,}000.$	Differ.		Anzahl der Fehler berechnet.	Anzahl der Fehler beobachtet.	
$0 =$	- - $= 0{,}236.$	$0{,}236 . 110$	=	26,0	26	vid. Seite 47.
$1 =$	- - $= 0{,}631.$	$0{,}395 . 110$	=	43,4	43	
$2 =$	- - $= 0{,}867.$	$0{,}236 . 110$	=	25,9	24	
$3 =$	- - $= 0{,}964.$	$0{,}097 . 110$	=	10,7	11	
$4 =$	- - $= 0{,}993.$	$0{,}029 . 110$	=	3,2	4	
$5 =$	- - $= 0{,}999.$	$0{,}006 . 110$	=	0,7	0	
über $5 =$	- - $= 1{,}000.$	$0{,}001 . 110$	=	0,1	2	
			Summa	110,0	110.	

Man ersieht aus dieser Uebereinstimmung, dass die Methode eine hinreichende Genauigkeit bietet, besonders in denjenigen Gruppen, wo die Fehler zahlreicher auftreten.

Wenn wir nunmehr zum Schluss, nachdem wir die Theorie hergeleitet und durch Zahlenbeispiele bewiesen haben, deren Anwendbarkeit im praktischen Leben einer vorurtheilsfreien Kritik unterziehen, so werden wir zugeben müssen, dass die Methode der kleinsten Quadrate als Ausgleichungs-Rechnung für Beobachtungsreihen ein sehr nützliches und wesentliches Hülfsmittel bildet, und dass ihr darin eine andere Rechnungs-Methode nicht gleichkommt.

Damit wäre sie gegen den Vorwurf geschützt: Nichts mehr und nichts Besseres zu sein, denn eine nutzlose mathematische Künstelei.

Allerdings darf man auch von dieser Rechnung nicht Leistungen verlangen, welche ausser ihrem Bereiche liegen. Wollte man z. B.

von ihr verlangen, aus wenigen Beobachtungen mehrere unbekannte Grössen zu bestimmen, d. h. mehr Unbekannte zu bestimmen, als überhaupt Beobachtungen vorhanden sind, so wäre dies ein Unding. Man wolle nicht vergessen, dass die erste Bedingung ihrer Zulässigkeit die ist, dass mehr Beobachtungen als Postulate zur Bestimmung der unbekannten Grössen vorhanden, und dass die sämmtlichen Beobachtungen, welche zur Rechnung dienen sollen, unter gleichartigen Verhältnissen angestellt sein müssen, damit sich überhaupt aus ihnen ein System der wahrscheinlichen Fehler formiren lasse.

Aus diesem Grunde ihre beschränkte Anwendbarkeit! Würde man z. B. bei gewissen Aufgaben der politischen Arithmetik und der Statistik über eine grosse Anzahl von Beobachtungen — unter gleichartigen Verhältnissen angestellt — disponiren, so würde es uns auch auf diesen Gebieten gelingen, manche bisher unbekannte Gesetze zu ermitteln. Indess leider fehlen bei diesen Aufgaben gewöhnlich die vielen gleichartigen Beobachtungen, aus denen sich ein System der wahrscheinlichen Fehler formiren liesse. Es ist immer nur eine Beobachtung unter gleichen Verhältnissen vorhanden, aus denen mehrere Unbekannte bestimmt werden sollen. Was vermittelst der Methode der kleinsten Quadrate unmöglich.

Dagegen sollte die Methode der kleinsten Quadrate bei Ermittelung und zur Bestimmung der sogenannten (vielfach gebräuchlichen, physikalisch-, chemisch-, mechanisch-technischen) Erfahrungs-Coefficienten niemals unbenutzt gelassen werden.

Wenn es auch nicht immer gelingt, die volle Sicherheit durch die Berechnung zu erlangen, so ist es doch von grösstem Werthe und Bedeutung, den Grad der Genauigkeit zu erfahren, mit welchem man die Vorgänge beobachtet hat, oder mit welcher die Abweichungen von einer — in Ermangelung eines Gesetzes — unterstellten Hypothese eingetreten sind. Selbst für Hypothesen ist die Methode — wenn sonst die obigen Cardinal-Bedingungen ihrer Zulässigkeit erfüllt sind — im Stande, einen Grad der Genauigkeit nachzuweisen, welche viele unserer sonstigen menschlichen Kenntnisse nicht besitzen, wiewohl Niemand an deren Untrüglichkeit zu zweifeln wagt.

Druck der Hofbuchdruckerei von Trowitzsch & Sohn in Frankfurt a. O.